

Recenzja

w postępowaniu w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego
doktorowi Pawłowi Wójcikowi

Dr Paweł Wójcik uzyskał tytuł magistra matematyki w 2009 roku na Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie. Stopień doktora uzyskał w 2014 roku na Uniwersytecie Śląskim w Katowicach, na podstawie rozprawy *Operatory zachowujące, w sposób przybliżony i dokładny, ortogonalność i relacje pokrewne*, której promotorem był dr hab. Jacek Chmieliński.

Od 2011 roku dr Wójcik pracuje na Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie. W roku akademickim 2018/2019 odbył staż na Uniwersytecie Śląskim w Katowicach.

Zainteresowania naukowe i tematyka badawcza doktora Wójcika dotyczą przede wszystkim analizy funkcjonalnej, w szczególności teorii operatorów i geometrii przestrzeni Banacha.

Omówienie osiągnięcia naukowego

Habilitant przedstawił do oceny osiągnięcie naukowe „Zastosowanie pochodnych norm i przybliżonych ortogonalności w Geometrii Przestrzeni Banacha”, w postaci cyklu 12 prac (są to prace (1-N)–(8-N) oraz (1-S)–(4-S) z załączonej listy publikacji). Prace te ukazały się w dobrych i bardzo dobrych czasopismach matematycznych. Osiem prac jest samodzielnych, pozostałe cztery współautorskie. Dokumentacja wniosku zawiera oświadczenia współautorów dotyczące ich wkładu w prace (1-N), (3-N), (5-N) oraz (4-S). Szczegółowe przedstawienie wyników prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego, z podaniem motywacji oraz odniesień do wyników innych autorów, znajduje się w obszernym i dobrze napisanym autoreferacie. Prace te mają charakter dość techniczny i choćby pobieżne przedstawienie ich zawartości wymagałoby wprowadzenia wielu pojęć i oznaczeń. Dlatego ograniczę się jedynie do naszkicowania rezultatów zawartych w poszczególnych pracach.

(1-S) P. Wójcik, *Self-adjoint operators on real Banach spaces*, *Nonlinear Anal. Theory, Methods & Applications* **81** (2013), 54-61.

W książce [2] (numeracja tu i dalej wg bibliografii dołączonej do autoreferatu) sformułowano dwa pytania dotyczące charakteryzacji odwzorowań $f: X \rightarrow X$ rzeczywistej przestrzeni Banacha X spełniających równanie funkcyjne

$$\rho'_+(f(x), y) = \rho'_+(x, f(y)),$$

gdzie ρ'_+ oznacza pochodną normy w przestrzeni X . W pracy (1-S) habilitant otrzymał częściową odpowiedź na pierwsze z tych pytań. Podanych jest tu kilka warunków, które musi spełniać takie odwzorowanie. Wykazano m.in., że musi być ono liniowe i ciągłe. Pełne rozwiązanie uzyskano dla przestrzeni $C(M)$ funkcji ciągłych na przestrzeni metrycznej M . Następnie w (1-S) otrzymano pełną odpowiedź na drugie ze wspomnianych pytań i związaną z tym pewną charakteryzację skończenie wymiarowych przestrzeni unitarnych.

(2-S) P. Wójcik, *Characterization of linear similarities through functional equation and mappings preserving orthogonalities*, Linear Algebra Appl. **579** (2019), 206–216.

We wcześniejszej pracy (2) habilitant udowodnił, że odwzorowanie liniowe przestrzeni Banacha zachowujące tzw. ρ -ortogonalność musi być podobieństwem (tj. izometrią z dokładnością do stałej mnożnikowej). W pracy (2-S) liniowość odwzorowania udało się (przy pewnych dodatkowych założeniach) zastąpić jego addytywnością. Otrzymany rezultat pozwolił podać pełną odpowiedź na pytanie postawione w książce [2] dotyczące rozwiązań pewnego równania funkcyjnego w przestrzeniach Banacha, w którym występują pochodne normy.

(3-S) P. Wójcik, *When are maps preserving semi-linear products linear?*, Aequationes Math. **96** (2022), 669–676.

Wykazano, że odwzorowanie pomiędzy skończenie wymiarowymi przestrzeniami unormowanymi o tym samym wymiarze, które zachowuje tzw. semi-iloczyn skalarny, jest liniowe i izometryczne. Twierdzenie to nie przenosi się na przestrzenie nieskończenie wymiarowe. Dokładniej, skonstruowany został przykład jednostajnie gładkiej przestrzeni Banacha X (izomorficznej z ℓ_2) oraz ciągłego odwzorowania $f: X \rightarrow X$, które zachowuje semi-iloczyn skalarny, ale nie jest liniowe. Motywacją do napisania pracy (3-S) był błąd wykryty w pracy [40].

(4-S) K. Gryszka, P. Wójcik, *Generalized orthogonality equations in finite-dimensional normed spaces*, Ann. Funct. Anal. **14**, article 41 (2023).

Praca poświęcona jest, dla odwzorowań przestrzeni Banacha, rozwiązaniom pewnych równań funkcyjnych, w których występują pochodne normy. W szczególności scharakteryzowano odwzorowania $f: X \rightarrow X$ spełniające równanie

$$\rho'_+(f(x), f(y)) = \rho'_+(x, y), \quad x, y \in X,$$

gdzie X jest skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną spełniającą pewne naturalne warunki.

(1-N) J. Chmieliński, T. Stypuła, P. Wójcik, *Approximate orthogonality in normed spaces and its applications*, Linear Algebra Appl. **531** (2017), 305–317.

Podane zostały pewne nowe charakteryzacje tzw. przybliżonej ortogonalności w rzeczywistych przestrzeniach unormowanych. Otrzymane wyniki zostały zastosowane do badania przybliżonej ortogonalności w przestrzeni $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ operatorów ograniczonych w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , w przestrzeni $C_0(K)$ funkcji ciągłych znikających

w nieskończoności określonych na przestrzeni lokalnie zwartej K oraz w przestrzeni ilorazowej gładkiej przestrzeni unormowanej.

(2-N) P. Wójcik, *Generalized Daugavet equations, affine operators and unique best approximation*, *Studia Math.* **238** (2017), 235–247.

W pracy wprowadzono następujące pojęcie związane z własnością Daugaveta. Mówimy, że rodzina \mathcal{F} ciągłych odwzorowań afinicznych przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y ma własność (D), jeżeli

$$\|A_1 + \cdots + A_n\| = \|A_1\| + \cdots + \|A_n\|$$

dla dowolnego skończonego układu odwzorowań rodziny \mathcal{F} (norma oznacza tu normę odwzorowania afinicznego). Udowodniono szereg własności i charakteryzacji rodzin o własności (D). Otrzymane wyniki zastosowano do zagadnień najlepszej aproksymacji w przestrzeniach odwzorowań afinicznych.

(3-N) J. Chmieliński, P. Wójcik, *Approximate symmetry of Birkhoff orthogonality*, *J. Math. Anal. Appl.* **461** (2018), 625–640.

Ortogonalność wg Birkhoffa jest na ogół relacją niesymetryczną. W (3-N) wprowadzono, dla rzeczywistej przestrzeni Banacha X , pewną stałą, oznaczaną przez $S(X)$, związaną z przybliżoną symetrią ortogonalności. Udowodniono szereg interesujących własności stałej $S(X)$ oraz jej związki z pewnymi innymi stałymi występującymi w geometrii przestrzeni Banacha.

(4-N) P. Wójcik, *Extensions of linear operators from hyperplanes and strong uniqueness of best approximation in $\mathcal{L}(X, W)$* , *J. Approx. Theory* **246** (2019), 28–42.

Praca zawiera szereg interesujących rezultatów związanych z zagadnieniami najlepszej aproksymacji oraz rzutów i rozszerzeń minimalnych w przestrzeniach operatorów w rzeczywistych przestrzeniach Banacha. Rezultaty te oraz rozumowania użyte do ich uzyskania są dość techniczne. Istotną rolę w dowodach odgrywają pochodne normy.

(5-N) P. Niemiec, P. Wójcik, *Applications of amenable semigroups in operator theory*, *Studia Math.* **252** (2020), 27–48.

Grupa lub półgrupa nazywa się *amenable* (nie ma dobrego polskiego odpowiednika tej nazwy), jeżeli – mówiąc bardzo skrótowo – istnieje na niej średnia niezmiennicza. Praca (S-5) poświęcona jest zastosowaniu takich półgrup w teorii operatorów. Badane są reprezentacje takich półgrup w algebrze ciągłych endomorfizmów przestrzeni Banacha. Podane są m.in. warunki, przy których istnieje rzut na zadaną podprzestrzeń przemienny z daną reprezentacją. Wyniki pracy (S-5) stanowią istotne rozszerzenie wielu znanych wcześniej klasycznych twierdzeń.

(6-N) P. Wójcik, *Approximate orthogonality in normed spaces and its applications II*, *Linear Algebra Appl.* **632** (2022), 258–267.

Podana jest pewna charakteryzacja przybliżonej ortogonalności w sensie Birkhoffa dla zespolonych przestrzeni unormowanych. Wcześniej w (1-N) była ona znaleziona dla przestrzeni rzeczywistych. Przeniesienie tego wyniku na przypadek

zespólny okazało się zadaniem nietrywialnym. Pozwoliło to rozszerzyć zastosowania otrzymane w (1-N) na przypadek zespólny. W (6-N) podanych jest również kilka nowych zastosowań.

(7-N) P. Wójcik, *Vertices of the unit ball of subspaces in $\mathcal{L}(H)$ and strong unicity of best approximation in $\mathcal{L}(\ell_2^2)$* , Linear Algebra Appl. **632** (2022), 281–293.

Praca poświęcona jest geometrii kuli jednostkowej w przestrzeni $\mathcal{L}(H)$, gdzie H jest przestrzenią Hilberta. Badane są wierzchołki takich kul. Otrzymane rezultaty zostały zastosowane do zagadnienia najlepszej aproksymacji w przestrzeni operatorów. Bardzo ciekawe są przykłady i twierdzenia dla przestrzeni $\mathcal{L}(\ell_2^2, \ell_2^2)$ i $\mathcal{L}(\ell_2^2, \ell_2^4)$, czasem zupełnie zaskakujące.

(8-N) P. Wójcik, *Approximate Birkhoff orthogonalities in normed spaces*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **29**(5), (2022), 599-609.

Powraca tu zagadnienie przybliżonej ortogonalności w sensie Birkhoffa. Podana jest pewna charakteryzacja przybliżonej ortogonalności przy użyciu punktów ekstremalnych kuli jednostkowej w przestrzeni sprzężonej. Otrzymana jest także charakteryzacja przybliżonej ortogonalności w przestrzeni operatorów zwartych określonych na przestrzeni refleksywnej.

Przedstawione osiągnięcie naukowe, które w dalszym ciągu będą dla uproszczenia nazywał rozprawą habilitacyjną, stanowi bez wątpienia cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych opublikowanych w znanych czasopismach naukowych. Tytuł rozprawy dobrany jest trafnie. Prace wchodzące w skład rozprawy zawierają cały szereg wartościowych i niebanalnych rezultatów dotyczących geometrii przestrzeni Banacha, w szczególności geometrii przestrzeni operatorów ograniczonych, i stanowią istotny wkład w rozwój tej dziedziny. Są one ściśle powiązane z wcześniejszymi badaniami znanych matematyków poprzez wzmocnienie, rozszerzenie lub uogólnienie ich wyników, a także odpowiedzi na stawiane przez nich pytania. Prace te były wielokrotnie cytowane przez innych matematyków i mogą stanowić inspirację do dalszych badań. Każda z nich jest poświęcona konkretnym nietrywialnym problemom. Zawarte tam rozumowania są często złożone technicznie i dowodzą dobrej orientacji habilitanta w literaturze. Nie ulega wątpliwości, że dr Wójcik jest dojrzałym naukowcem.

Wyniki rozprawy nie są może spektakularne, ale stoją na dobrym poziomie. Ich otrzymanie wymagało nowych pomysłów i pokonania istotnych trudności. Stosowane techniki dowodowe to metody zwykle używane w algebrze liniowej i geometrycznej analizie funkcjonalnej. Za najciekawsze uważam prace (5-N) i (7-N).

Ocena aktywności naukowej habilitanta

Dr Wójcik jest autorem bądź współautorem 58 publikacji naukowych (wliczając w to prace rozprawy), publikowanych zasadniczo w znanych czasopismach matematycznych o zasięgu międzynarodowym. Jest to liczba znaczna. Ponad połowa z tych publikacji jest samodzielna. Prace te dotyczą rozmaitych zagadnień geometrycznej analizy funkcjonalnej, teorii operatorów i teorii aproksymacji. Prace spoza rozprawy

są na zbliżonym poziomie do prac z rozprawy. Znaczna jest także liczba cytowań – około 300, zależnie od bazy.

W roku akademickim 2018/2019 dr Wójcik odbył staż naukowy w Instytucie Matematyki na Uniwersytecie Śląskim w Katowicach. Efektem tego pobytu było kilka kolejnych publikacji. Spełniony jest zatem ustawowy wymóg realizowania aktywności naukowej w więcej niż jednej uczelni.

Na szczególną uwagę zasługuje stypendium Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przyznane na 2 lata począwszy od roku 2020, co dowodzi uznania dla działalności naukowej dra Wójcika.

Pozostałe strony aktywności habilitanta prezentują się słabiej. Aktywność konferencyjną należy uznać za raczej umiarkowaną, podobnie jak udział w grantach i współpracę naukową z zagranicą. Brak jest również informacji o pobytach w ośrodkach zagranicznych i udziale w znaczących konferencjach międzynarodowych.

Konkluzja

W mojej ocenie dr Paweł Wójcik spełnia zwyczajowe i ustawowe wymagania do nadania stopnia doktora habilitowanego zapisane w ustawie *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* z dnia 20 lipca 2018 roku. Z pełnym przekonaniem popieram wnioski o nadanie doktorowi Pawłowi Wójcikowi stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka.


Wojciech Banaszczyk