Uniwersytet Pedagogiczny
im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

SZKOŁA DOKTORSKA

DYSCYPLINA: MATEMATYKA

Aleksandra Huczek

Dynamika odwzorowań nieoddalających w przestrzeniach geodezyjnych

rozprawa doktorska
napisana pod kierunkiem
dr. hab. Andrzeja Wiśnickiego, prof. UP

Kraków 2023

The Pedagogical University
named after the Commission of national Education
in Krakow

DOCTORAL SCHOOL

DISCIPLINE: MATHEMATICS

Aleksandra Huczek

Dynamics of nonexpansive mappings in geodesic spaces

doctoral dissertation
written under the supervision of
dr hab. Andrzej Wiśnicki, prof. UP

Krakow 2023

Najserdeczniejsze podziękowania
dla mojego Promotora dr. hab. Andrzeja Wiśnickiego, prof. UP
za nieocenione wsparcie w każdej sytuacji, wyrozumiałość, cierpliwość,
ogromną motywację i życzliwość, a także za możliwość ciągłego rozwoju,
duże zaangażowanie, cały poświęcony czas, opiekę, cenne rady,
oraz za nieustanną pomoc merytoryczną, bez której nie byłoby możliwe
napisanie mojej rozprawy.

También me gustaría agradecer
al prof. dr. Rafael Espínola García todos los conocimientos transmitidos,
la posibilidad de desarrollo y supervisión científica durante mi estancia en Sevilla,
así como la amabilidad mostrada y la fructífera colaboración.

Spis treści

Wstęp

Odwzorowania nieoddalające, tzn. 1-lipschitzowskie, podobnie jak izometrie tworzą jedną z podstawowych klas odwzorowań nieliniowych. Wiele problemów analizy nieliniowej można sprowadzić do badania dynamiki takich odwzorowań. Różne klasy odwzorowań nieliniowych, zachowujących porządek na stożkach w przestrzeniach Banacha, które są nieoddalające w metryce Hilberta lub Thompsona, znalazły szereg zastosowań m.in. w teorii gier, teorii sterowania oraz w nieliniowej teorii Perrona-Frobeniusa (zob. [39, 69]). Związki odwzorowań nieoddalających z analizą wypukłą mają zastosowania w takich dyscyplinach jak mechanika, ekonomia, równania różniczkowe cząstkowe, teoria informacji, teoria aproksymacji, przetwarzanie sygnałów i obrazów, teoria gier, teoria optymalizacji, prawdopodobieństwo i statystyka oraz biologia obliczeniowa (zob. [10]).

Celem niniejszej rozprawy jest analiza asymptotycznego zachowania orbit przekształceń nieoddalających i ich jednoparametrowych półgrup w przestrzeniach geodezyjnych. Dobrze znane twierdzenie Banacha o punkcie stałym opisuje zachowanie orbit odwzorowań zwężających w przestrzeniach metrycznych zupełnych. Innymi słowy, jeżeli f jest kontrakcją, to istnieje dokładnie jeden taki punkt stały x_0 odwzorowania f, że dla dowolnego x ciąg kolejnych iteracji $f^n(x)$ jest zbieżny do x_0. Odwzorowania nieoddalające stanowią graniczny przypadek w teorii odwzorowań zwężających, gdy stała Lipschitza dąży do 1, i ich dynamika jest znacznie bardziej skomplikowana. W przypadku, gdy mamy do czynienia z odwzorowaniem nieoddalającym niezbędne są dodatkowe założenia, aby zagwarantować istnienie punktu stałego. Co więcej, nawet gdy istnieje taki punkt odwzorowania f, ciąg kolejnych iteracji $f^n(x)$ generalnie nie jest zbieżny do punktu stałego. Potwierdzeniem złożoności dynamiki odwzorowań nieoddalających jest fakt, że badania asymptotycznego zachowania tych odwzorowań są jednymi z najczęściej prowadzonych w analizie nieliniowej. Dotychczasowe badania były przeważnie prowadzone albo w przestrzeniach Banacha (por. [14, 28, 40]), albo w przestrzeniach metrycznych o niedodatniej krzywiźnie, tzw. przestrzeniach CAT(0) (por. [8, 17, 61]), albo w konkretnych przestrzeniach z ustaloną metryką, zwykle typu hiperbolicznego (por. [4, 23, 41, 55, 69, 76]).

Przestrzenie geodezyjne, które pierwotnie opisywały geometrię punktów na powierzchni Ziemi, to przestrzenie metryczne w których każde dwa punkty można połączyć krzywą o długości równej odległości pomiędzy tymi punktami. W przypadku kuli Ziemskiej geodezyjną jest fragment koła wielkiego. Z czasem pojęcie to zaczęto rozważać ogólniej, przykładowo w teorii grafów. Przestrzenie geodezyjne stanowią ważną klasę przestrzeni metrycznych, mających szczególne znaczenie na przykład w ogólnej teorii względności. Przy pomocy własności tych przestrzeni spojrzymy na omawiane problemy dynamiki odwzorowań nieoddalających ogólniej i w sposób bardziej jednolity.

Prowadząc rozważania na temat dynamiki przekształceń nieoddalających nie można nie powiedzieć o twierdzeniu Wolffa-Denjoya. Twierdzenie to w klasycznej wersji zostało sformułowane, a następnie kilkukrotnie udowodnione w 1926 roku przez J. Wolffa i A. Denjoya. Opisuje ono zachowanie się iteracji odwzorowań holomorficznych, określonych na kole jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej w siebie, które nie posiadają punktów stałych.

Twierdzenie
Niech $\Delta \subset \mathbb{C}$ będzie otwartym kołem jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej oraz niech $f : \Delta \to \Delta$ będzie odwzorowaniem holomorficznym, które nie ma punktów stałych. Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in \partial\Delta$, że ciąg iteracji $\{f^n\}$ przekształcenia f jest jednostajnie zbieżny na każdym zwartym podzbiorze Δ do ξ.

Twierdzenie Wolffa-Denjoya na przestrzeni lat zostało uogólnione w wielu kierunkach, dla różnych rodzajów odwzorowań oraz różnych typów przestrzeni, zarówno skończenie i nieskończenie wymiarowych. Dzięki dogłębnej analizie istniejących już wyników oraz metod badawczych w nich zawartych udało się podać kolejne, nowe uogólnienia twierdzenia typu Wolffa-Denjoya, które stanowią znaczną część niniejszej rozprawy.

Mówiąc dalej o teorii odwzorowań nieliniowych warto wspomnieć o hipotezie Karlssona-Nussbauma, która jest uogólnieniem twierdzenia Wolffa-Denjoya. Hipoteza ta została sformułowana niezależnie przez A. Karlssona oraz R. Nussbauma i jest wciąż ważnym, otwartym problemem w tym obszarze badań. W niniejszej rozprawie podamy nasz odpowiednik hipotezy Karlssona-Nussbauma, tzn. nowy wynik dla rezolwent odwzorowań nieoddalających. Co więcej, dzięki wprowadzeniu pojęcia atraktora otrzymamy pewne szczególne przypadki tej hipotezy, które również stanowią nowe rezultaty.

Hipoteza
Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w skończenie wymiarowej rzeczywistej przestrzeni unormowanej. Jeżeli $f : D \to D$ jest odwzorowaniem nieoddalającym nie mającym punktów stałych, określonym na przestrzeni metrycznej Hilberta (D, d_H), to istnieje taki wypukły zbiór $\Omega \subseteq \partial D$, że dla każdego $x \in D$ wszystkie punkty skupienia $\omega_f(x)$ orbity $O_f(x)$ leżą w zbiorze Ω.

Ważnymi rodzinami przekształceń są półgrupy odwzorowań (zob. [28]). Szczególny przypadek stanowi jednoparametrowa, ciągła półgrupa odwzorowań nieoddalających. Znane są pewne jej własności oraz odpowiednik twierdzenia Wolffa-Denjoya opisujący zbieżność orbit tych półgrup względem pseudometryki Kobayashiego (zob. [23]). Co więcej, istnienie wspólnego punktu stałego dla jednoparametrowej półgrupy odwzorowań nieoddalających o ograniczonych orbitach w jednostajnie wypukłej przestrzeni Banacha zostało udowodnione przez Browdera (zob. [18]). W tym kontekście również udało się zaproponować ogólne podejście do twierdzenia Wolffa-Denjoya, które obejmuje pewne wcześniejsze wyniki jako szczególne przypadki. Dodatkowo warto zaznaczyć, że w tym przypadku otrzymujemy także wyniki związane z hipotezą Karlssona-Nussbauma.

Niniejsza rozprawa składa się z sześciu rozdziałów. W pierwszym rozdziale znajdują się podstawowe definicje, oznaczenia, lematy, uwagi i przykłady niezbędne do pełnego zrozumienia tej pracy. Rozpoczniemy od tytułowego przekształcenia nieoddalającego, a dalej powiemy o typach przestrzeni metrycznych, którymi będziemy się zajmować. Zdefiniujemy orbitę odwzorowania i sformułujemy wraz z dowodem twierdzenie Całki, stanowiące jeden z klasycznych argumentów w tym obszarze badań. Następnie w dalszej części rozdziału pierwszego szczegółowo omówimy metryki Hilberta, Thompsona i Poincaré oraz pseudometrykę Kobayashiego i ich kluczowe, z punktu widzenia rozprawy, własności. Podążając za pomysłem Beardona i Karlssona sformułujemy szczególne własności przestrzeni metrycznych, które nazwiemy Aksjomatami. Na koniec krótko zatrzymamy się przy definicji horokul, podamy ich własności oraz zastanowimy się czy istnieje związek pojęcia horokuli z wcześniej wspomnianymi aksjomatami.

Rozdział drugi w całości poświęcimy krótkiej historii na temat twierdzenia Wolffa-Denjoya. Podamy pierwszą wersję tego twierdzenia zaproponowaną w 1926 roku przez J. Wolffa. Ze względu na fakt, że na przestrzeni lat pojawiło się wiele uogólnień twierdzenia Wolffa-Denjoya, nie jesteśmy w stanie podać i omówić wszystkich. Skupimy się jednak na tych, które są istotne z punktu widzenia tej rozprawy oraz na tych, które ukazują kierunki badań nad tym problemem.

Rozdział trzeci zostanie poświęcony naszym nowym wynikom dotyczącym uogólnienia twierdzenia Wolffa-Denjoya we właściwych przestrzeniach geodezyjnych. Zostanie on podzielony na dwie zasadnicze części, tj. przypadek dyskretny, dotyczący dynamiki iteracji odwzorowań nieoddalających oraz na przypadek ciągły, dotyczący jednoparametrowych, ciągłych półgrup takich odwzorowań. Rezultaty znajdujące się w pierwszym podrozdziale zostały opublikowane w pracy [49], natomiast wyniki z drugiego podrozdziału znajdują się w pracy [50]. W obu przypadkach na początku sformułujemy wraz z dowodami ogólne wyniki, a następnie wnioski dla ograniczonych, ściśle wypukłych obszarów w rzeczywistych lub zespolonych przestrzeniach skończenie wymiarowych. Warto dodać, że w przypadku ciągłym przedstawimy odpowiednik twierdzenia Całki, który wydaje się być nowym wynikiem, niespotykanym w literaturze.

Rozdział czwarty będzie dotyczył twierdzenia Wolffa-Denjoya w przypadku nieskończenie wymiarowym. Rozważania tego rozdziału stanowią w dużym stopniu samodzielny wkład autorki niniejszej rozprawy. Niezbędne będzie wprowadzenie przestrzeni (λ, κ)-quasi geodezyjnych, odwzorowań zwartych i nieznaczne zmodyfikowanie podanych w pierwszym rozdziale aksjomatów. Podobnie jak w trzeciej części niniejszej rozprawy nasze wyniki podzielimy na dwie zasadnicze części, tj. przypadek dyskretny i ciągły. Co więcej, w obu podrozdziałach zaproponujemy odpowiedniki twierdzenia Wolffa-Denjoya dla ograniczonych, ściśle wypukłych obszarów w przestrzeni Banacha. Wyniki dotyczące przypadku dyskretnego znajdują się w naszej wspólnej pracy [49], natomiast wyniki z przypadku ciągłego w samodzielnym artykule [52].

Piąty rozdział zostanie poświęcony rozważaniom na temat drugiego problemu badawczego, tzn. hipotezie Karlssona-Nussbauma. Na początku krótko opiszemy na czym polega wspomniana hipoteza. Problem ten jest wciąż otwarty, ale znamy pewne jego szczególne rozwiązania, które również pojawią się na początku tego rozdziału. Dalej wprowadzimy pojęcie atraktora i przy jego pomocy sformułujemy i udowodnimy twierdzenia, które można nazwać szczególnymi wariacjami na temat hipotezy Karlssona-Nussbauma. Twierdzenie 5.14 udowodniliśmy w [49], natomiast jego uogólnienie, tzn. Twierdzenie 5.15 pojawia się później w [52]. Ponadto przy pomocy podobnych technik podamy znacznie krótszy dowód twierdzenia, które głosi, że atraktor odwzorowania nieoddalającego względem metryki Hilberta zawiera się w gwiaździstym podzbiorze brzegu przestrzeni. W czwartym podrozdziale omówimy pojęcie atraktora w kontekście jednoparametrowych półgrup i sformułujemy odpowiedniki twierdzeń z przypadku dyskretnego, które też stanowią samodzielny wynik autorki rozprawy [52]. Na koniec piątego rozdziału skonstruujemy rezolwentę odwzorowania nieoddalającego, udowodnimy jej potrzebne własności oraz wreszcie podamy nasz wynik, będący odpowiednikiem omawianej hipotezy dla takich odwzorowań. Rezultat ten został opublikowany w [51].

W ostatnim szóstym rozdziale przypomnimy pojęcie przestrzeni hiperbolicznej w sensie Gromova i podamy kilka jej własności. Następnie omówimy pewną charakteryzację geodezyjnej ograniczoności w przestrzeniach CAT(κ) o ujemnej krzywiźnie. Wykorzystując twierdzenie typu Wolffa-Denjoya podamy nieco uproszczony dowód twierdzenia (por. [79]), które przedstawia związek pomiędzy geodezyjną ograniczonością a własnością punktu stałego.

Introduction

Nonexpansive mappings, i.e., 1-Lipschitz, form like isometries one of the basic classes of nonlinear mappings. Many problems of nonlinear analysis can be reduced to studying the dynamics of such mappings. Various classes of nonlinear mappings preserving order on cones in Banach spaces that are nonexpansive with respect to Hilbert's or Thompson's metric have found a number of applications, among others, in game theory, control theory and the nonlinear Perron-Frobenius theory (see [39, 69]). The relations between nonexpansive mappings and convex analysis are applicable in such disciplines as mechanics, economics, partial differential equations, information theory, approximation theory, signal and image processing, game theory, optimization theory, probability, statistics and computational biology (see [10]).

The aim of this dissertation is to analyze the asymptotic behavior of the orbits of nonexpansive mappings and their one-parameter semigroups in geodesic spaces. The well-known Banach fixed point theorem describes the behavior of orbits of contraction mappings in complete metric spaces. In other words, if f is a contraction, then there exists exactly one fixed point x_0 of the mapping f such that for every x, a sequence of iterates $f^n(x)$ of f convergences to x_0. Nonexpansive mappings are the limiting case in the theory of contraction mappings, when the Lipschitz constant tends to 1, and their dynamics are much more complicated. In the case of a nonexpansive mapping additional assumptions are necessary to guarantee existence of a fixed point. Moreover, even when there is such a point of mapping f, the sequence of iterates $f^n(x)$ in general does not convergence to a fixed point. The confirmation of complexity of dynamics of nonexpansive mappings is the fact that the study of asymptotic behavior of such mappings is one of the most frequently conducted in nonlinear analysis. Research so far has mostly been performed in Banach spaces (see [14, 28, 40]), or in metric spaces with nonpositive curvature, so called CAT(0) metric spaces (see [8, 17, 61]), or in specific hyperbolic metric spaces (see [4, 23, 41, 55, 69, 76]).

Geodesic spaces, which originally described the geometry of points on the Earth's surface, are metric spaces in which any two points can be connected by a curve of length equal to the distance between these points. In the case of the Earth, the geodesic is a fragment of a great circle. Over time this concept began to be considered more generally, for example in graph theory. Geodesic spaces are an important class of metric spaces, which are of particular importance, for example, in general theory of relativity. Using the properties of these spaces, we will look at the discussed problems of dynamics of nonexpansive mappings in a more general and uniform way.

Thinking about dynamics of nonexpansive mappings it is impossible not to say about the Wolff-Denjoy theorem. In the classical version this theorem has been formulated and then proved several times in 1926 by J. Wolff and A. Denjoy. The theorem describes the behavior of iterates of holomorphic self-mappings on the unit disc of the complex plane which do not have fixed points.

Theorem
If $f : \Delta \to \Delta$ is a holomorphic mapping of the unit disc $\Delta \subset \mathbb{C}$ without a fixed point, then there is a point $\xi \in \partial\Delta$ such that the iterates f^n of f converge locally uniformly on every compact subset of Δ to ξ.

The Wolff-Denjoy theorem has been generalized over years in different directions, for different kinds of mappings and different types of spaces, both finite and infinite dimensional. Thanks to an in depth analysis of the existing results and the research methods contained in them, it was possible to provide further, new generalizations of the Wolff-Denjoy theorems which are a significant part of this dissertation.

Speaking further about the theory of nonlinear mappings, it is worth mentioning about the Karlsson-Nussnaum conjecture, which is a generalization of the Wolff-Denjoy theorem. This conjecture has been independently formulated by A. Karlsson and R. Nussbaum and it is still an important open problem in this area of research. In this dissertation we will give our counterpart of the Karlsson-Nussbaum conjecture, i.e., our result for resolvents of nonexpansive mappings. Moreover, due to introducing the notion of attractor we will get some particular cases of this conjecture, which are also new results.

Conjecture
Let D be a bounded, convex domain in a real finite dimensional normed space. If $f : D \to D$ is a fixed point free nonexpansive mapping on a Hilbert's metric space (D, d_H), then there exists a convex set $\Omega \subseteq \partial D$ such that for each $x \in D$, all accumulation points $\omega_f(x)$ of the orbit $O_f(x)$ lie in Ω.

Semigroups are important families of mappings (see [28]). A special case is a one-parameter, continuous semigroup of nonexpansive mappings. Some of its properties are known sa well as a counterpart of the Wolff-Denjoy theorem describing the convergence of the orbits of these semigroups with respect to Kobayashi's distance (see [23]). Moreover, the existence of a common fixed point for a one-parameter semigroup of nonexpansive mappings with bounded orbits in a uniformly convex Banach space was proved by Browder (see [18]). In this context, it was also possible to propose a general approach to the Wolff-Denjoy theorem which includes some previous results as special cases. In addition, it is worth noting that in this case we also get results related to the Karlsson-Nussbaum conjecture.

This dissertation consists of six chapters. In the first chapter there are basic definitions, notations, lemmas, notes and examples necessary for a full understanding of this dissertation. We will start with the title nonexpansive mapping and then we will talk about the types of metric spaces which we will be dealing with. We will define the orbit of a mapping and formulate Całka's theorem with its proof, which is one of the classical arguments in this area of research. Next, in chapter one, we will discuss in detail the notions of Hilbert's metric, Thompson's metric, Poincaré's metric and Kobayashi's distance and their important, from the point of view of the dissertation, properties. Following the idea of Beardon and Karlsson, we will formulate special properties of metric spaces, which we will call Axioms. Finally, we will briefly dwell on the definition of horoballs, give their properties and consider whether there is a connection between the concept of a horoball with the previously mentioned axioms.

The second chapter is entirely devoted to a short history about the Wolff-Denjoy theorem. We will give the first version of this theorem proposed in 1926 by J. Wolff. Due to the fact that there have been many generalizations of the Wolff-Denjoy theorem over the years, we are not able to list and discuss all of them. However, we will focus on those that are important from the point of view of this dissertation and those that show the directions of research on this problem.

The third chapter will be devoted to our new results concerning generalizations of the Wolff-Denjoy theorem in proper geodesic spaces. It will be divided into two main parts, i.e., the discrete case concerning dynamics of iterates of nonexpansive mappings and the continuous case concerning one-parameter continuous semigroups of such mappings. The results in the first subchapter were published in [49], while the results from the second subchapter are in [50]. In both cases, at the beginning we will formulate general results with the proofs, and then conclusions for bounded, strictly convex domains in real or complex finite dimensional vector spaces. It is worth adding that in the continuous case we will present a counterpart of Całka's theorem, which seems to be a new result, unheard of in the literature.

The fourth chapter will be about the Wolff-Denjoy theorem in an infinite dimensional case. The considerations of this chapter are an independent contribution of the author of this dissertation. It will be necessary to introduce (λ, κ)-quasi geodesic mertic spaces, a notion of compact mapping and a slight modification of the axioms given in the first chapter. Similarly as in the third part of this dissertation, we will divide our results into two main parts, i.e., discrete and continuous case. Moreover, in both subchapters we will propose a counterparts of the Wolff-Denjoy theorem for bounded, strictly convex domains in Banach spaces. Discrete case results are in our collaborative work [49], and the results from the continuous case in an independent article [52].

The fifth chapter will be devoted to considerations on the second research problem, i.e., the Karlsson-Nussbaum conjecture. At the beginning, we will briefly describe what this conjecture is all about. This problem is still open but we know some specific solutions to it, which will also appear at the beginning of this chapter. Next, we introduce the concept of an attractor and with its help we formulate and prove theorems that can be called special variations on the Karlsson-Nussbaum conjecture. Theorem 5.14 was proved in [49], whereas its generalization, that is, Theorem 5.15 appears later in [52]. Moreover, using similar techniques, we will give a much shorter proof of the theorem that the attractor of a nonexpansive mapping with respect to Hilbert's metric is contained in a star-shaped subset of the boundary of the space. In the fourth subchapter, we will discuss the concept of attractor in the context of one-parameter semigroups and we will formulate the counterparts of theorems from the discrete case, which are also the author's own results [52]. At the end of the fifth chapter, we will construct the resolvent of a nonexpansive mapping, next we will prove its necessary properties and finally we give our result being a counterpart of the discussed conjecture for such mappings. This result has been published in [51].

In the last, sixth chapter, we will recall the concept of the Gromov hyperbolic metric space and give some of its properties. Next, we will discuss some characterization of geodesic boundary in CAT(κ) metric spaces with negative curvature. Using the Wolff-Denjoy type theorem we will provide a slightly simplified proof of the theorem (see [79]), which shows the relation between geodesic boundary and the fixed point property.

Rozdział 1

Podstawowe pojęcia

W rozdziale tym wprowadzimy podstawowe pojęcia i oznaczenia oraz przytoczymy najważniejsze fakty i własności niezbędne do lepszego zrozumienia niniejszej rozprawy. Rozpoczniemy od definicji tytułowego odwzorowania nieoddalającego, następnie rozważymy kluczowe w kontekście dalszych rozważań własności i przykłady przestrzeni metrycznych. W kolejnym kroku wprowadzimy definicję przestrzeni geodezyjnej i zobrazujemy to pojęcie odpowiednimi przykładami. Rozdział zakończymy rozważaniami na temat niezbędnego w badaniu dynamiki odwzorowań nieliniowych narzędzia, jakim są horokule i zbadamy pewne ich własności.

Załóżmy, że (X, d_X), (Y, d_Y) są przestrzeniami metrycznymi. Nasze rozważania rozpoczniemy od zdefiniowania dwóch typów przekształceń nieliniowych, tzn. odwzorowania nieoddalającego oraz kontrakcyjnego.

Definicja 1.1 ([23], [55], [71])
Odwzorowanie $f : X \to Y$ nazywamy *nieoddalającym*, jeżeli

$$d_Y(f(x), f(y)) \leqslant d_X(x, y)$$

dla dowolnych $x, y \in X$.

Przykład 1.2
Rozważając przestrzeń metryczną $([0, \frac{1}{2}], d_E)$ funkcja $f(x) = x^2$ jest przykładem odwzorowania nieoddalającego, podobnie jak dowolna izometria jest odwzorowaniem nieoddalającym.

Drugim typem odwzorowań, które będziemy rozważać, są przekształcenia kontrakcyjne, wprowadzone przez M. Furiego oraz A. Vignolego w 1969 roku [38].

Definicja 1.3 ([12], [55])
Odwzorowanie $f : X \to Y$ nazywamy *kontrakcyjnym*, jeżeli

$$d_Y(f(x), f(y)) < d_X(x, y)$$

dla dowolnych $x, y \in X$.

Przykład 1.4
Niech $(\mathbb{R}, d_E)$ będzie rzeczywistą, euklidesową przestrzenią metryczną oraz niech odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określone wzorem $f(x) = x - \mathrm{arcctg} x$. Funkcja f jest przykładem odwzorowania kontrakcyjnego.

1.1 Przestrzenie metryczne

W tym podrozdziale przedstawimy niezbędne własności przestrzeni metrycznych, na podstawie których będziemy budować nasze nowe wyniki. Dodatkowo przypomnimy definicje przestrzeni z metryką Hilberta i pseudometryką Kobayashiego, ponieważ te przestrzenie stanowiły początek naszych rozważań, o czym więcej w kolejnym rozdziale. W szczególności sformułujemy i udowodnimy potrzebne w dalszych rozważaniach własności wspomnianych przestrzeni.

Niech (Y, d) będzie przestrzenią metryczną oraz rozważmy ciągłą krzywą $\sigma : [a, b] \to Y$. *Długość krzywej* σ definiujemy jako

$$L_d(\sigma) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} d(\sigma(t_{i-1}), \sigma(t_i)) \,:\, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \right\}.$$

Definicja 1.5 ([78], [93])
Metryką wewnętrzą powiązaną z metryką d nazywamy funkcję $d_l : Y \times Y \to [0, \infty]$ zdefiniowaną jako

$$d_l(x, y) = \inf\{L_d(\sigma) \,:\, \sigma : [a, b] \to X \text{ jest ciągła, } \sigma(a) = x \text{ i } \sigma(b) = y\}.$$

Co więcej, (Y, d) nazywamy *przestrzenią metryczną z metryką wewnętrzną*, jeżeli

$$d = d_l.$$

Przykład 1.6
Przykładem przestrzeni z metryką wewnętrzą jest n wymiarowa przestrzeń euklidesowa, tzn. zbiór $\mathbb{R}^n$ wyposażony w metrykę euklidesową d_E. Podobnie przestrzenie unormowane stanowią szeroką klasę przestrzeni z metryką wewnętrzą.

Jeżeli $x \in Y$, $r > 0$, to jako $B(x, r)$ i $\bar{B}(x, r)$ oznaczamy odpowiednio otwartą i domkniętą kulę o środku w punkcie x i promieniu r.

Definicja 1.7 ([86])
Przestrzeń metryczną (Y, d) nazywamy *właściwą*, jeśli każda domknięta kula $\bar{B}(x, r)$, $x \in Y$, jest zwarta.

W 1931 roku Heinz Hopf i jego uczeń Willi Rinow pokazali, że własność właściwości przestrzeni metrycznej z metryką wewnętrzną jest równoważna zupełności i lokalnej zwartości tej przestrzeni ([48]). Twierdzenie Hopfa-Rinowa (Twierdzenie 4.3.1. [93]/ Twierdzenie 2.1.15. [78]) daje analog dobrze znanej charakterystyki zwartych podzbiorów $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 1.8 (Hopf-Rinow)
Niech (Y, d) będzie przestrzenią metryczną z metryką wewnętrzną. Następujące warunki są równoważne

(i) (Y, d) *jest właściwa;*

(ii) (Y, d) *jest zupełna i lokalnie zwarta.*

Przypomnimy teraz pojęcie orbity odwzorowania.

Definicja 1.9
Orbitą odwzorowania $f : Y \to Y$ w punkcie $x \in Y$ nazywamy zbiór

$$O_f(x) := \{f^n(x) : n = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Uwaga 1.10
Jeżeli kiedykolwiek będziemy zakładać, że dane odwzorowanie ma nieograniczone orbity, będzie to oznaczało, że istnieje taki podciąg liczb naturalnych $\{n_k\}$ *oraz* $x \in Y$*, że* $f^{n_k}(x) \to \infty$*, gdy* $k \to \infty$*.*

Następne twierdzenie, sformułowane i udowonione przez A. Całkę w [25], jest jednym z klasycznych argumentów w tym obszarze badań. Zauważmy, że oryginalne twierdzenie Całki dotyczy przestrzeni metrycznych (X, d) z własnością, że każdy ograniczony podzbiór tej przestrzeni jest całkowicie ograniczony. Stąd możemy wnioskować, że uzupełnienie przestrzeni X jest przestrzenią właściwą. Ponieważ w naszych dalszych rozważanich będziemy zakładać właściwość przestrzeni metrycznej, poniżej przedstawimy dowód twierdzenia Całki dla takich przestrzeni inspirowany pracą S. Gouëzela [42, Lemat 2.6].

Twierdzenie 1.11 ([49])
Załóżmy, że (Y, d) *jest właściwą przestrzenią metryczną. Niech* $x_0 \in Y$ *oraz* $f : Y \to Y$ *będzie odwzorowaniem nieoddalającym. Jeżeli istnieje taki ciąg liczb naturalnych* $\{n_k\}$*, że podciąg* $\{f^{n_k}(x_0)\}$ *orbity odwzorowania* f *w punkcie* x_0 *jest ograniczony, to cała orbita* $O_f(x_0)$ *jest ograniczona.*

Dowód. Ustalmy $x_0 \in Y$ i rozważmy odwzorowanie nieoddalające $f : Y \to Y$. Niech

$$O_f(x_0) = \{f^n(x_0),\, n = 1, 2, \ldots\}$$

będzie orbitą odwzorowania f w punkcie x_0. Z założenia, ponieważ Y jest przestrzenią właściwą, istnieje podciąg $\{f^{n_k}(x_0)\}$ ciągu $\{f^n(x_0)\}$ zbieżny do pewnego $x \in Y$. Stąd istnieje k_0, takie że $f^{n_k}(x_0) \in B(x, \frac{1}{2})$ dla dowolnego $k \geqslant k_0$. Rozważmy zbiór

$$B = \overline{O(x_0)} \cap \bar{B}(x, 1)$$

i zauważmy, że B jest zwarty, ponieważ Y jest właściwa. Stąd istnieje skończona liczba kul $B(x_i, \frac{1}{2})$, $x_i \in O(x_0)$, $i = 1, \ldots, N$, którymi możemy pokryć zbiór B. Niech $x_i = f^{m_i}(x_0)$ dla każdego i oraz weźmy liczbę k wystarczająco dużą tak, aby $n_k - m_i > 0$ dla $i = 1, \ldots, N$ oraz

$$f^{n_k}(x_0) = f^{n_k - m_i}(f^{m_i}(x_0)) = f^{n_k - m_i}(x_i) \in B\Big(x, \frac{1}{2}\Big). \tag{1.1}$$

Niech

$$B_i = \overline{O(x_0)} \cap \bar{B}\Big(x_i, \frac{1}{2}\Big), \qquad i \in \{1, \ldots, N\}$$

i wybierzmy $y \in B_i$. Korzystając z nierówności trójkąta, faktu, że odwzorowanie f jest nieoddalające oraz (1.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(f^{n_k - m_i}(y), x) &\leqslant d(f^{n_k - m_i}(y), f^{n_k - m_i}(x_i)) + d(f^{n_k - m_i}(x_i), x) \\ &\leqslant d(y, x_i) + d(f^{n_k - m_i}(x_i), x) \leqslant 1. \end{aligned}$$

Ponieważ y został wybrany dowolnie, $f^{n_k - m_i}(B_i) \subset B$ dla dowolnego i. Niech

$$\overline{m} = \max_{i=1,\dots,N} \{n_k - m_i\}.$$

Wtedy dla każdego $n > \overline{m}$ mamy

$$f^n(B) \subset \bigcup_i f^n(B_i) = \bigcup_i f^{n-(n_k-m_i)}(f^{n_k-m_i}(B_i)) \subset \bigcup_i f^{n-(n_k-m_i)}(B) \subset \bigcup_{m<n} f^m(B). \quad (1.2)$$

Teraz skorzystamy z zasady indukcji matematycznej. Wiemy, że $f^{\overline{m}+1}(B) \subset \bigcup_{m \leqslant \overline{m}} f^m(B)$. Ustalmy $n > \overline{m}$ i załóżmy, że

$$f^j(B) \subset \bigcup_{m \leqslant \overline{m}} f^m(B)$$

dla każdego $j \leqslant n$. Zatem z (1.2) mamy

$$f^{n+1}(B) \subset \bigcup_{j \leqslant n} f^j(B) \subset \bigcup_{m \leqslant \overline{m}} f^m(B).$$

Na mocy zasady indukcji matematyczej otrzymujemy, że

$$f^n(B) \subset \bigcup_{m \leqslant \overline{m}} f^m(B)$$

dla każdego $n > \overline{m}$. Ponieważ zbiór $\bigcup_{m \leqslant \overline{m}} f^m(B)$ jest ograniczony oraz $f^{n_{k_0}}(x_0) \in B$, ostatecznie otrzymujemy, że cała orbita $O_f(x_0)$ jest również ograniczona.
Co kończy dowód. ■

Zauważmy, że twierdzenie Całki implikuje, że orbity odwzorowań nieoddalających, określonych na właściwych przestrzeniach metrycznych są w całości albo ograniczone albo rozbieżne do nieskończoności. Powyższą obserwację będziemy często wykorzystywać w różnych kontekstach.

1.1.1 Metryka Hilberta i Thompsona

W tej sekcji wprowadzimy definicje metryki Hilberta i metryki Thompsona oraz ich własności, niezbędne w kontekście dalszych rozważań.

Metryka Hilberta jest uogólnieniem pojęcia odległości w modelu Kleina dla koła w geometrii hiperbolicznej na wypukłe podzbiory przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Celem Hilberta była konstrukcja aksjomatycznej geometrii metrycznej, w której istnieją trójkąty o niewspółliniowych wierzchołkach i takie, że jeden z jego boków jest równy sumie dwóch pozostałych. Sama definicja ma wiele zastosowań, przykładowo do twierdzenia Perrona-Frobeniusa [69] oraz ma bezpośredni związek z przestrzeniami hiperbolicznymi w sensie Gromova, o czym możemy przeczytać przykładowo w pracy A. Karlssona i G. A. Noskova [58]. Warto również wspomnieć, że Y. Benoist, uogólniając wyniki Karlssona i Noskova, podał zbiór warunków, aby ograniczony i wypukły obszar w $\mathbb{R}^n$ wyposażony w metykę Hilberta tworzył przestrzeń hiperboliczną w sensie Gromova [13].

Pierwsza definicja metryki Hilberta została wprowadzona przez D. Hilberta [47] jako logarytm dwustosunku czwórki punktów w następujący sposób.

Definicja 1.12 ([12], [47], [70])
Niech D będzie wypukłym i ograniczonym obszarem rzeczywistej przestrzeni Banacha oraz niech $x, y \in D$. Rozważmy linię prostą przechodzącą przez punkty x i y, która przecina brzeg zbioru D w punktach a i b. Zakładamy, że punkt x leży pomiędzy punktami a i y oraz punkt y leży pomiędzy punktami x i b. Wtedy *metryką Hilberta* nazywamy

$$\widehat{d}_H(x,y) = \log\left(\frac{\|y-a\|\,\|x-b\|}{\|x-a\|\,\|y-b\|}\right), \qquad x \neq y$$

oraz $\widehat{d}_H(x,y) = 0$, jeżeli $x = y$.

W analizie matematycznej używana jest również alternatywna definicja metryki Hilberta, wprowadzona przy pomocy pojęcia stożka i zapoczątkowana przez G. D. Birkhoffa. Ponieważ niektóre własności przestrzeni metrycznej Hilberta łatwiej będzie nam udowodnić stosując definicję z wykorzystaniem stożka, również pojawia się ona w naszych rozważaniach.

W celu przedstawienia definicji Birkhoffa, przypomnijmy podstawowe, ale niezbędne pojęcia.

Definicja 1.13 ([69], [70])
Rozważmy rzeczywistą przestrzeń Banacha $(V, ||\cdot||)$. Wypukły zbiór $C \subset V$ nazywamy *stożkiem*, jeżeli

(C1) $\lambda C \subseteq C$ dla dowolnej liczby $\lambda \geqslant 0$

(C2) $C \cap (-C) = \{0\}$.

Co więcej, stożek C wprowadza porządek częściowy $\leqslant_C$ na V zdefiniowany jako

$$x \leqslant_C y, \qquad \text{jeżeli} \quad y - x \in C.$$

Stożek nazywamy *normalnym* jeśli istnieje taka stała $\kappa > 0$, że

$$||x|| \leqslant \kappa ||y||$$

zawsze, gdy $0 \leqslant_C x \leqslant_C y$.

Pojęcie stożka możemy wprowadzić ogólniej, gdy V jest rzeczywistą (skończenie lub nieskończenie wymiarową) przestrzenią wektorową, ale dla naszych rozważań ograniczymy się do rzeczywistej przestrzeni Banacha.

Definicja 1.14 ([69], [70])
Niech $C \subset V$ będzie domkniętym, normalnym stożkiem z niepustym wnętrzem. Mówimy, że $y \in C$ *dominuje* $x \in V$, jeżeli istnieją $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, takie że $\alpha y \leqslant x \leqslant \beta y$.

Pojęcie to pozwala wprowadzić na stożku C relację równoważności $\sim_K$. Wtedy $x \sim_k y$, jeżeli x dominuje y i y dominuje x.

Dla dowolnych $x, y \in C$ takich, że $x \sim_K y$ i $y \neq 0$, definiujemy

$$M(x/y) = \inf\{\beta > 0 : x \leqslant \beta y\}$$

oraz

$$m(x/y) = \sup\{\alpha > 0 : \alpha y \leqslant x\}.$$

Definicja 1.15 ([69], [70])
(Pseudo-)metrykę Hilberta definiujemy jako

$$d_H(x, y) = \log\left(\frac{M(x/y)}{m(x/y)}\right).$$

Co więcej, $d_H(0, 0) = 0$ i $d_H(x, y) = \infty$, jeżeli $x \nsim_K y$.

Jeżeli D jest ograniczonym, wypukłym obszarem rzeczywistej skończenie wymiarowej przestrzeni Banacha, to można pokazać (por. [Twierdzenie 2.2, [70]], [[75], str. 31-32]), że

$$d_H(x, y) = \widehat{d}_H(x, y).$$

Rozważmy ściśle dodatni funkcjonał $\varphi \in V^*$ oraz zbiór

$$\Sigma_\varphi^\circ = \{x \in \mathrm{int}C : \varphi(x) = 1\}.$$

W przestrzeniach skończenie wymiarowych zbiór Σ_φ° jest ograniczony względem normy, ale może być nieograniczony w przypadku przestrzeni nieskończenie wymiarowych. Jeśli D jest wypukłym, ograniczonym, otwartym podzbiorem przestrzeni V, wtedy istnieje domknięty, normalny stożek z niepustym wnętrzem C w $V \times \mathbb{R}$ oraz ściśle dodatni funkcjonał $\varphi \in (V \times \mathbb{R})^*$ taki, że D jest izometryczny z Σ_φ° i tym samym jest wyposażony w metrykę Hilberta d_H (zob. [76, s. 206]).

Patrząc z punktu widzenia analizy matematycznej, metryka Hilberta zdefiniowana na stożku ma jedną wadę. Mianowicie jest to metryka par promieni na stożku, a nie punktów na stożku. Dlatego w zastosowaniach czasami łatwiej rozważyć pokrewną metrykę wprowadzoną przez Thompsona [85].

Definicja 1.16 ([69], [70], [72])
Niech $C \subset V$ będzie domkniętym stożkiem, wtedy *metrykę Thompsona* $d_T : C \times C \to [0, \infty]$ definiujemy jako

$$d_T(x, y) = \log(\max\{M(x/y), M(y/x)\})$$

dla $x \sim_K y$ i $y \neq 0$. Co więcej, $d_T(0, 0) = 0$ i $d_T(x, y) = \infty$, jeżeli $x \nsim_K y$.

Warto również podkreślić, że d_T jest metryką dla każdej klasy równoważności na stożku C, podczas gdy $d_H(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \lambda y$ dla pewnej liczby $\lambda > 0$.

Pokażemy teraz własności metryk Hilberta i Thompsona, które są kluczowe w naszych dalszych rozważaniach.

Niech $D \subset V$ będzie zbiorem otwartym i ograniczonym oraz niech $x, y, z \in D$ i $s \in [0, 1]$. Wtedy wprowadzimy następujący warunek, który jest równoważny wypukłości kuli w D, jako

$$d(sx + (1 - s)y, z) \leqslant \max\{d(x, z), d(y, z)\}. \tag{C}$$

Co więcej, rozpatrując cztery punkty $x, y, z, w \in D$ i $s \in [0, 1]$, wprowadźmy dodatkowo bardziej restrykcyjny warunek (D), określony następującą nierównością:

$$d(sx + (1 - s)y, sz + (1 - s)w) \leqslant \max\{d(x, z), d(y, w)\}. \tag{D}$$

Następny lemat pokazuje, że metryka Hilberta spełnia warunek (C).

Lemat 1.17 (por. [69], [75])
Niech $K \subset V$ będzie domkniętym, normalnym stożkiem z niepustym wnętrzem, $\varphi \in V^*$ będzie dodatnim funkcjonałem i $\Sigma_\varphi^\circ = \{x \in \mathrm{int}K : \varphi(x) = 1\}$. Wtedy

$$d_H(sx + (1-s)y, z) \leqslant \max\{d_H(x,z), d_H(y,z)\}$$

dla dowolnych $x, y, z \in \Sigma_\varphi^\circ$ i $s \in [0,1]$.

Dowód. Ustalmy $x, y, z \in \Sigma_\varphi^\circ$ i niech $r = \max\{d_H(x,z), d_H(y,z)\}$. Na mocy definicji metryki Hilberta zauważmy, że

$$\alpha_1 z \leqslant x \leqslant \beta_1 z \quad \text{oraz} \quad \alpha_2 z \leqslant y \leqslant \beta_2 z,$$

gdzie $0 \leqslant \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2} \leqslant e^r$. Jeśli $s \in [0,1]$, to

$$\alpha_s z = (s\alpha_1 + (1-s)\alpha_2)z \leqslant sx + (1-s)y \leqslant (s\beta_1 + (1-s)\beta_2)z = \beta_s z. \tag{1.3}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \frac{\beta_s}{\alpha_s} &= \frac{s\beta_1 + (1-s)\beta_2}{\alpha_s} = \frac{s\alpha_1}{\alpha_s} \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{(1-s)\alpha_2}{\alpha_s} \cdot \frac{\beta_2}{\alpha_2} \\ &\leqslant \frac{s\alpha_1}{\alpha_s} \cdot e^r + \frac{(1-s)\alpha_2}{\alpha_s} \cdot e^r = \frac{s\alpha_1 + (1-s)\alpha_2}{\alpha_s} \cdot e^r \\ &= e^{\max\{d_H(x,z), d_H(y,z)\}}. \end{aligned}$$

Z powyższych rozważań oraz z (1.3) otrzymujemy

$$d_H(sx + (1-s)y, z) \leqslant \max\{d_H(x,z), d_H(y,z)\}.$$

Co kończy dowód. ∎

Niestety nie wiemy, czy metryka Hilberta spełnia warunek (D).

Podążając za pracą Beardona [12] sformułujemy i udowodnimy dwie własności metryki Hilberta niezbędne w rozdziale 5.

Dla dwóch różnych punktów $x, y \in \mathbb{R}^n$ oznaczmy jako L_{xy} prostą przechodzącą przez punkty x i y.

Lemat 1.18 (zob. Lemat 5.1. [12])
Niech $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^n$, $D_1 \subset D_2$ będą ograniczonymi, wypukłymi obszarami i niech (D_1, d_1), (D_2, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi Hilberta, wtedy

$$d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y), \quad x, y \in D_1.$$

Co więcej, dla dwóch różnych punktów $x, y \in D_1$, $d_1(x,y) = d_2(x,y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy odcinek $L_{xy} \cap D_1$ pokrywa się z odcinkiem $L_{xy} \cap D_2$.

DOWÓD. Niech $D_1 \subset D_2$ oraz $x, y \in D_1$ będą dwoma różnymi punktami. Rozważmy linię prostą przechodzącą przez punkty x i y, przecinającą brzegi ∂D_1, ∂D_2 zbiorów D_1 i D_2, odpowiednio w punktach a_1, b_1 oraz a_2, b_2 (w taki sposób, że punkt x leży pomiędzy a_i i y oraz punkt y leży pomiędzy x i b_i dla $i = 1, 2$). Zauważmy, że $||a_1 - a_2|| \cdot ||x - y|| \geqslant 0$. Stąd

$$\begin{aligned} &||a_1 - a_2|| \cdot ||a_1 - x|| + ||a_1 - x|| \cdot ||a_1 - x|| + ||x - y|| \cdot ||a_1 - x|| \leqslant \\ \leqslant\ &||a_1 - a_2|| \cdot ||a_1 - x|| + ||a_1 - a_2|| \cdot ||x - y|| + ||a_1 - x|| \cdot ||a_1 - x|| + ||x - y|| \cdot ||a_1 - x||, \end{aligned}$$

a następnie

$$\frac{||a_1 - a_2|| + ||a_1 - x|| + ||x - y||}{||a_1 - a_2|| + ||a_1 - x||} \leqslant \frac{||a_1 - x|| + ||x - y||}{||a_1 - x||}.$$

Zatem

$$\frac{||a_2 - y||}{||a_2 - x||} \leqslant \frac{||a_1 - y||}{||a_1 - x||}. \tag{1.4}$$

W analogiczny sposób można pokazać, że

$$\frac{||x - b_2||}{||y - b_2||} \leqslant \frac{||x - b_1||}{||y - b_1||}. \tag{1.5}$$

Z (1.4) i (1.5) otrzymujemy

$$d_2(x, y) = \log\left(\frac{||a_2 - y|| \cdot ||x - b_2||}{||a_2 - x|| \cdot ||y - b_2||}\right) \leqslant \log\left(\frac{||a_1 - y|| \cdot ||x - b_1||}{||a_1 - x|| \cdot ||y - b_1||}\right) = d_1(x, y).$$

Co więcej, jeżeli $a_1 = a_2$ oraz $b_1 = b_2$, to $d_1(x, y) = d_2(x, y)$.
Co kończy dowód. ■

Lemat 1.19 (zob. Lemat 5.2. [12])
Załóżmy, że (D, d_H) jest przestrzenią metryczną Hilberta, $x_0 \in D$ oraz $l \in [0, 1)$. Wtedy przekształcenie

$$g(x) = x_0 + l(x - x_0)$$

jest odwzorowaniem kontrakcyjnym.

DOWÓD. Ustalmy $x_0 \in D$ i $l \in [0, 1)$. Niech $x, y \in D$ oraz rozważmy prostą przechodzącą przez punkty x i y, przecinającą brzeg zbioru D w dwóch punktach x' i y' w taki sposób, że x leży pomiędzy x' i y oraz y leży pomiędzy x i y'. Rozważmy teraz dwa punkty

$$z' = (1 - l)x_0 + lx' \in \partial g(D) \qquad \text{oraz} \qquad w' = (1 - l)x_0 + ly' \in \partial g(D).$$

Zauważmy, że punkty $z', g(x), g(y), w'$ są współliniowe i ułożone tak, że $g(x)$ leży pomiędzy punktami z' i $g(y)$ oraz $g(y)$ leży pomiędzy punktami $g(x)$ i w'. Ponieważ $g(D)$ jest zawarty w zwartym podzbiorze D, z Lematu 1.18 wnioskujemy, że

$$d_H(g(x), g(y)) < d_2(g(x), g(y)),$$

gdzie d_2 oznacza metrykę Hilberta w zbiorze $g(D)$. Na mocy definicji metryki Hilberta otrzymujemy

$$d_H(x, y) = \log\left(\frac{||x' - y||\,||x - y'||}{||x' - x||\,||y - y'||}\right) = \log\left(\frac{||z' - g(y)||\,||w' - g(x)||}{||z' - g(x)||\,||w' - g(y)||}\right) = d_2(g(x), g(y)).$$

Zatem $d_H(g(x), g(y)) < d_H(x, y)$. Co kończy dowód. ■

W kolejnym lemacie udowodnimy, że w przypadku metryki Thompsona również prawdziwy jest warunek (C).

Lemat 1.20 (por. [69])
Niech $K \subset V$ będzie domkniętym, normalnym stożkiem z niepustym wnętrzem. Wtedy

$$d_T(sx + (1-s)y, z) \leqslant \max\{d_T(x,z), d_T(y,z)\}$$

dla dowolnych $x, y, z \in K$ i $s \in [0,1]$.

Dowód. Ustalmy $x, y, z \in K$ i niech $r = \max\{d_T(x,z), d_T(y,z)\}$. Korzystając wprost z definicji metryki Thompsona zauważmy, że

$$\alpha_1 z \leqslant x \leqslant \beta_1 z \qquad \text{oraz} \qquad \alpha_2 z \leqslant x \leqslant \beta_2 z,$$

gdzie $\max\left\{\beta_1, \frac{1}{\alpha_1}\right\} \leqslant e^r$ oraz $\max\left\{\beta_2, \frac{1}{\alpha_2}\right\} \leqslant e^r$. Dla $s \in [0,1]$ zdefiniujmy

$$\alpha_s = (1-s)\alpha_1 + s\alpha_2 \qquad \text{oraz} \qquad \beta_s = (1-s)\beta_1 + s\beta_2$$

i zauważmy, że

$$\alpha_s z = (s\alpha_1 + (1-s)\alpha_2)z \leqslant sx + (1-s)y \leqslant (s\beta_1 + (1-s)\beta_2)z = \beta_s z. \tag{1.6}$$

Ponieważ $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \beta_1, \beta_2 \leqslant e^r$ otrzymujemy, że $\alpha_s \geqslant e^{-r}$ i podobnie $\beta_s \leqslant e^r$. Wtedy $\max\{\beta_s, \frac{1}{\alpha_s}\} \leqslant e^r$. Stąd i z (1.6) ostatecznie mamy

$$d_T(sx + (1-s)y, z) \leqslant \max\{d_T(x,z), d_T(y,z)\}.$$

Co kończy dowód. ■

Nie wprowadzamy innych własności metryki Thompsona, ponieważ nie będą one dla nas istotne w dalszych rozważaniach, ale więcej szczegółów można znaleźć na przykład w [30].

1.1.2 Metryka Poincaré i pseudometryka Kobayashiego

Kolejnymi przykładami odległości, które będziemy rozważać w dalszej części tej pracy, są metryka Poincaré oraz odległość Kobayashiego. W tej sekcji przypomnimy definicje tych odległości oraz wprowadzimy ich niezbędne własności.

Oznaczmy jako $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ otwarte koło jednostkowe na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$. Modelem wszystkich niezmienniczych odległości w analizie zespolonej jest odległość Poincaré określona na kole jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej. Rzeczywiście, w 1882 roku H. Poincaré odkrył, że rozważając koło jednostkowe Δ wyposażone w odpowienią metrykę, można uznać je za model płaszczyzny hiperbolicznej.

Definicja 1.21 ([2], [6])
Metryką Poincaré na kole jednostkowym $\Delta \in \mathbb{C}$ nazywamy

$$d_\Delta(z,w) = \frac{1}{2}\log\frac{1 + \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|}{1 - \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|}, \qquad z, w \in \Delta.$$

Jedną z ważniejszych własności metryki Poincaré jest lemat Schwarza-Picka (zob. Twierdzenie 1.7. [2])

Lemat 1.22 (Schwarz-Pick)
Niech $f : \Delta \to \Delta$ będzie odwzorowaniem holomorficznym, wtedy

$$d_\Delta(f(z), f(w)) \leqslant d_\Delta(z, w), \qquad z, w \in \Delta.$$

Powyższy lemat mówi, że odwzorowanie holomorficzne określone na kole jednostkowym w siebie jest odwzorowaniem nieoddalającym względem metryki Poincaré.

Następnie chcielibyśmy zdefiniować uogólnienie metryki Poincaré na wypukłe obszary w zespolonych przestrzeniach Banacha, które miałoby podobne własności. W szczególności oczekujemy, że prawdziwy będzie odpowiednik lematu Schwarza-Picka. Pierwsze uogólnienie metryki Poincaré było rozważane w 1926 roku przez C. Carathéodoryego (zob. [26]). Co więcej, w 1967 roku S. Kobayashi przedstawił swoje uogólnienie, które okazało się bardziej użyteczne i jednocześnie obecnie jest bardziej popularne ([62],[63]). Chociaż w naszych rozważaniach posłużymy się tylko definicją (pseudo)odległości Kobayashiego, warto zaznaczyć, że istnieje również (inne) pojęcie metryki Kobayashiego ([64], [93]).

Symbolem $\mathcal{O}(X, Y)$ oznaczmy zbiór funkcji holomorficznych $f : X \to Y$.

Definicja 1.23 ([2], [4])
Niech D będzie wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha X. Funkcję $\delta_D : D \times D \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ określoną jako

$$\delta_D(z, w) = \inf\{d_\Delta(\gamma, \zeta) : \exists_{\varphi \in \mathcal{O}(\Delta, D)} \text{ takie, że } \varphi(\gamma) = z, \varphi(\zeta) = w\}, \quad z, w \in D,$$

nazywamy *funkcją Lemperta.*

Powyższa definicja jest prawdziwa w ogólniejszym przypadku, tzn. wtedy, gdy D jest spójną rozmaitością zespoloną (zob. [2]), ale w naszych rozważaniach będziemy ograniczać się do przypadku, gdy D jest wypukłym i ograniczonym obszarem w X.

Uwaga 1.24
Nietrudno udowodnić (np. naśladując Wniosek 1.1.6 z pracy M. Abate [2]) następującą, równoważną Definicji 1.23 definicję funkcji Lemperta:

$$\delta_D(z, w) = \inf\{d_\Delta(0, \zeta) : \exists_{\varphi \in \mathcal{O}(\Delta, D)} \text{ takie, że } \varphi(0) = z, \varphi(\zeta) = w\}, \quad z, w \in D.$$

Ogólnie rzecz biorąc funkcja Lemperta może nie spełniać nierówności trójkąta i stąd generalnie może nie być metryką (zob. [73]). Problem ten można rozwiązać wprowadzając następną definicję.

Definicja 1.25 ([2])
Niech $D \subset X$ będzie wypukłym obszarem. *Pseudoodległością Kobayashiego* nazywamy funkcję $k_D : D \times D \to \mathbb{R}_+$ określoną jako

$$k_D(z, w) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{k} \delta_D(z_{j-1}, z_j) \ : \ z_0 = z, \ z_k = w, \ z_1, \dots, z_{k-1} \in D, \ k \in \mathbb{N} \right\}$$

dla dowolnych $z, w \in D$.

Zauważmy, że k_D spełnia warunek symetrii, nierówność trójkąta jest w tym przypadku prawdziwa oraz $k_D(z,z)=0$ dla dowolnego $z \in D$. Z drugiej strony może się zdarzyć, że $k_D(z,w)=0$ dla dwóch różnych punktów $z \neq w$ (zob. [2]). Jednak, gdy D jest obszarem wypukłym i ograniczonym, to k_D jest metryką (zwaną wtedy odległością Kobayashiego).

Następne stwierdzenie, udowodnione w przypadku skończenie wymiarowym przez Lemperta [73], pokazuje, że pseudoodległość Kobayashiego dobrze zachowuje się na wypukłych obszarach przestrzeni Banacha X i pokrywa się z pojęciem funkcji Lemperta.

Stwierdzenie 1.26 ([33])
Niech $D \subset X$ będzie wypukłym obszarem. Wtedy

$$\delta_D(z,w) = k_D(z,w), \qquad z,w \in D.$$

Dla odległości Kobayashiego prawdziwe jest również uogólnienie Lematu Schwarza-Picka. (Co więcej, generalnie prawdziwe w przypadku rozmaitości zespolonych D, D', zob. Twierdzenie 1.16 [2]).

Twierdzenie 1.27 ([19], [44])
Niech D i D' będą ograniczonymi, wypukłymi obszarami w zespolonych przestrzeniach Banacha oraz niech (D, k_D) i $(D', k_{D'})$ będą odległościami Kobayashiego. Jeżeli $f : D \to D'$ jest odwzorowaniem holomorficznym, to

$$k_{D'}(f(z), f(w)) \leqslant k_D(z,w)$$

dla dowolnych $z,w \in D$.

Powyższe twierdzenie daje nam kolejny, ważny przykład odwzorowania, które jest przekształceniem nieoddalającym (względem odległości Kobayashiego).

W rozdziale 3 będziemy potrzebować faktu, że odległość Kobayashiego spełnia warunek (C), dlatego podążając za Abate [2], poniżej przedstawiamy tę własność wraz z jej dowodem.

Lemat 1.28 ([2])
Niech D będzie wypukłym i ograniczonym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha X. Wtedy dla dowolnych $x,y,z \in D$ oraz $s \in [0,1]$,

$$k_D(sx + (1-s)y, z) \leqslant \max\{k_D(x,z), k_D(y,z)\}.$$

Dowód. Ustalmy $x,y,z \in D$ i $s \in [0,1]$. Bez straty ogólności załóżmy, że

$$k_D(x,z) > k_D(y,z).$$

Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją odwzorowania holomorficzne $f, g : \Delta \to D$ i liczby $0 \leqslant \xi < \zeta < 1$, takie że $f(0) = x$, $g(0) = y$, $f(\zeta) = g(\xi) = z$ oraz

$$k_\Delta(0,\zeta) < k_D(x,z) + \varepsilon \qquad \text{i} \qquad k_\Delta(0,\xi) < k_D(y,z) + \varepsilon.$$

Ponieważ D jest wypukły, możemy zdefiniować odwzorowanie holomorficzne $h : \Delta \to D$ określone wzorem

$$h(\gamma) = sf(\gamma) + (1-s)g\Big(\frac{\xi\gamma}{\zeta}\Big),\ \gamma \in \Delta.$$

Zauważmy, że

$$h(0) = sf(0) + (1-s)g(0) = sx + (1-s)y \tag{1.7}$$

oraz

$$h(\zeta) = sf(\zeta) + (1-s)g(\xi) = z. \tag{1.8}$$

Z powyższych równości (1.7) i (1.8) oraz z faktu, że odwzorowanie h jako przekształcenie holomorficzne jest nieoddalające względem odległości Kobayashiego, otrzymujemy

$$k_D(sx + (1-s)y, z) = k_D(h(0), h(\zeta)) \leqslant k_\Delta(0, \zeta) < k_D(x, z) + \varepsilon.$$

Z dowolności ε mamy

$$k_D(sx + (1-s)y, z) \leqslant \max\{k_D(x, z), k_D(y, z)\}.$$

Co kończy dowód. ■

Warto wspomnieć, że w przypadku odległości Kobayashiego prawdziwych jest wiele innych własności ([2],[19], [44] [66], [83], [93]). Dla przykładu, prawdziwa jest podobna nierówność jak w Lemacie 1.28 dla czterech punktów, innymi słowy spełniony jest warunek (D), wspomniany w Sekcji 1.1.1. Mówi o tym natępny Lemat 1.29, który pozostawiamy bez dowodu, ponieważ te własności nie będą dla nas aż tak istotne w dalszych rozważaniach.

Lemat 1.29 ([19], [53], [66])
Niech $D \subset X$ będzie wypukłym, ograniczonym obszarem. Wtedy

(i) jeśli $x, y, z, w \in D$ i $s \in [0, 1]$, to

$$k_D(sx + (1-s)y, sz + (1-s)w) \leqslant \max\{k_D(x, z), k_D(y, w)\};$$

(ii) jeśli $x, y \in D$ i $s, t \in [0, 1]$, to

$$k_D(sx + (1-s)y, tx + (1-t)y) \leqslant k_D(x, y).$$

Dowód powyższego Lematu można przykładowo znaleźć w [2] (Stwierdzenie 1.4.10).

1.1.3 Aksjomaty

W swojej pracy A. F. Beardon [12] zakładał własności przestrzeni metrycznych, które stanowią punkt wyjścia do naszych rozważań. Wyniki z tej pracy i kilku innych omówimy bardziej szczegółowo w kolejnym rozdziale. A. Karlsson, rozważając wcześniejsze założenia Beardona i dodając swoje kolejne dwie własności, przedstawił je w postaci czterech aksjomatów. Podążając za pracą Karlssona [55], my również rozważmy następujące własności przestrzeni metrycznych.

Niech Y będzie zupełną przestrzenią metryczną oraz niech $C(Y)$ oznacza przestrzeń ciągłych funkcji rzeczywistych określonych na Y, wyposażonych w topologię zbieżności jednostajnej na ograniczonych podzbiorach. Właściwa przestrzeń metryczna może zostać uzwarcona $\overline{Y}^B = Y \cup Y(\infty)$ poprzez wykorzystanie funkcji Busemanna. Ustalając punkt $y \in Y$ zdefiniujmy odwzorowanie $\Phi : Y \to C(Y)$ określone jako

$$z \to d(\cdot, z) - d(z, y).$$

Przestrzeń Y zanurzamy iniektywnie w przestrzeń $C(Y)$ poprzez odwzorowanie Φ. (Pokrewne odwzorowanie było rozważane przez K. Kuratowskiego [68] oraz niezależnie przez K. Kunuguiego [67] w latach 30. ubiegłego wieku). Uzwarcenie jest uzyskiwane przez domknięcie obrazu $\Phi(Y)$ w przestrzeni $C(Y)$ z topologią zbieżności jednostajnej na zwartych podzbiorach Y. Zatem ciąg punktów $\{y_n\}$ zbiega do punktu ξ na brzegu $Y(\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$d(\cdot, y_n) - d(y_n, y)$$

zbiega jednostajnie na zwartych podzbiorach. Powyższe rozważania stanowią motywację do wprowadzenia Aksjomatu 1, więcej szczegółów można znaleźć w [9].

Aksjomat 1. Przestrzeń metryczna (Y, d) jest otwartym, gęstym podzbiorem zwartej przestrzeni metrycznej $(\overline{Y}, \overline{d})$ oraz topologie tych przestrzeni pokrywają się na Y. Dla dowolnego $w \in Y$, jeżeli $\{x_n\}$ jest ciągiem w Y zbieżnym do $\xi \in \partial Y = \overline{Y} \setminus Y$, to

$$d(x_n, w) \to \infty.$$

Pierwszy Aksjomat mówi, że przestrzeń Y można uzwarcić poprzez dodanie brzegu w nieskończoności.

Aksjomat 2. Jeżeli $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ są ciągami w Y zbiegającymi do różnych punktów na brzegu przestrzeni ∂Y, wtedy dla dowolnego $w \in Y$

$$d(x_n, y_n) - \max\{d(x_n, w), d(y_n, w)\} \to \infty.$$

Aksjomat 3. Jeżeli $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ są ciągami w Y, $x_n \to \xi \in \partial Y$ oraz jeżeli dla pewnego $w \in Y$

$$d(x_n, y_n) - d(y_n, w) \to -\infty,$$

to $y_n \to \xi$.

Aksjomat 4. Jeżeli $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ są ciągami w Y, $x_n \to \xi \in \partial Y$ oraz jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, y_n) \leqslant c$$

dla pewnej stałej c, to $y_n \to \xi$.

Uwaga 1.30

Zauważmy, że Aksjomat 2 *implikuje Aksjomat* 3. *Przy założeniu, że odległość pomiędzy dowolnymi punktami brzegowymi wynosi nieskończoność, tzn. przy założeniu Aksjomatu* 1, *Aksjomat* 2 *oraz Aksjomat* 3 *implikuje Aksjomat* 4.

Przykład 1.31

1) Przestrzeń metryczna Hilberta spełnia Aksjomat 1, ale ogólnie Aksjomat 2 nie jest prawdziwy. Rozważmy zbiór $D = (0,1) \times (0,1)$ oraz ciągi $x_n = (\frac{1}{3}, \frac{1}{n})$ i $y_n = (\frac{2}{3}, \frac{1}{n})$ dla $n \geqslant 1$, wtedy
$$d_H(x_n, y_n) = \log \left(\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} \right) = \log 4 \not\to \infty.$$
Można jednak pokazać, że (D, d_H) spełnia Aksjomat 2 pod warunkiem, że D jest ściśle wypukły [69]. Dodatkowo w przypadku metryki Hilberta prawdziwy jest tzw. uogólniony Aksjomat 2, który na potrzeby hipotezy Karlssona-Nussbauma wprowadzimy w rozdziale 5 (zob. Lemat 5.31).

2) Odległość Kobayashiego spełnia Aksjomaty 1 i 3 w przypadku zbiorów ściśle wypukłych.

3) Przestrzenie hiperboliczne w sensie Gromova spełniają Aksjomaty 2, 3 i 4 [55].

Zauważmy, że jeśli $w \in Y$, to $x_n \to w$ w Y wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n \to w$ w $\overline{Y}$. Natomiast jeśli $x_n \to w \in \partial Y$ (w $\overline{Y}$), to na mocy Aksjomatu 1 $d(x_n, w) \to \infty$. Dla przejrzystości zapisu zazwyczaj będziemy tak samo oznaczać te dwa rodzaje zbieżności.

Studiując powyższe aksjomaty, we wspomnianych wcześniej pracach Karlssona i Beardona, pojawiła się chęć sformułowania nowych wyników w zakresie dynamiki odwzorowań nieliniowych dla właściwych przestrzeni metrycznych w połączeniu z tymi właśnie własnościami. Przyczyniło się do powstania pytania: czy istnieje związek pomiędzy właściwymi przestrzeniami metrycznymi a wyżej wprowadzonymi aksjomatami? Kolejna uwaga, którą będziemy często wykorzystywać w naszych rozważaniach, odpowiada na to pytanie i określa zależność pomiędzy właściwymi przestrzeniami metrycznymi a Aksjomatem 1.

Uwaga 1.32
Niech (Y, d) będzie przestrzenią metryczną. (Y, d) jest przestrzenią właściwą wtedy i tylko wtedy, gdy (Y, d) spełnia Aksjomat 1.

Dowód.
($\Longrightarrow$) Rozważmy ciąg $\{x_n\} \subset Y$ i niech istnieje takie $\xi \in \partial Y$, że
$$\overline{d}(x_n, \xi) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.9}$$
Pokażemy, że dla dowolnego $w \in Y$ zachodzi
$$d(x_n, w) \to \infty, \quad n \to \infty.$$
Załóżmy nie wprost, że istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}$ ciągu $\{x_n\}$, taki że ciąg odległości $\{d(x_{n_k}, w)\}$ jest ograniczony. Ponieważ z założenia Y jest właściwa, istnieje zbieżny podciąg $\{x_{n_{k_l}}\}$ ciągu $\{x_{n_k}\}$ do pewnego elementu $y \in Y$, tzn. $d(x_{n_{k_l}}, y) \to 0,\ l \to \infty$. Dodatkowo, ponieważ topologie przestrzeni (Y, d) i $(\overline{Y}, \overline{d})$ pokrywają się na Y, otrzymujemy
$$\overline{d}(x_{n_{k_l}}, y) \to 0, \quad l \to \infty.$$
Co stanowi sprzeczność z (1.9), gdyż $y \in Y$, a $\xi \in \partial Y$.

($\Longleftarrow$) Niech $A \subset Y$ będzie zbiorem domkniętym i ograniczonym oraz rozważmy ciąg $\{x_n\} \subset A$. Ponieważ (Y, d) spełnia Aksjomat 1, ze zwartości $\overline{Y}$ mamy, że istnieje zbieżny podciąg $\{x_{n_k}\}$ ciągu $\{x_n\}$ do pewnego $y \in \overline{Y}$, tzn.

$$\overline{d}(x_{n_k}, y) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Gdyby $y \in \partial Y$, to z Aksjomatu 1, $d(x_{n_k}, w) \to \infty$, $k \to \infty$ dla każdego $w \in A$. Co oznacza, że

$$\mathrm{diam} A \geqslant d(x_{n_k}, w) \to \infty, \quad k \to \infty.$$

Stanowi to sprzeczność, ponieważ z założenia A jest zbiorem ograniczonym. Zatem $y \in Y$, co pokazuje, że zbiór A jest zwarty (ponieważ topologie w przestrzeniach Y i $\overline{Y}$ się pokrywają) i kończy dowód. $\blacksquare$

1.2 Przestrzenie geodezyjne

W kolejnym podrozdziale zastanowimy się co oznacza pojęcie przestrzeni geodezyjnej oraz zobrazujemy to pojęcie stosownymi przykładami. Słowo *geodezyjny* jest ściśle związane z *geodezją*, tzn. jedną z nauk o Ziemi, która bada jej kształt i wielkość oraz wykonuje pomiary na jej powierzchni. Stąd *geodezyjną* nazywano pierwotnie najkrótszą odległość pomiędzy punktami na powierzchni Ziemi. Następnie pojęcie to zostało uogólnione przez matematyków na inne przestrzenie. Rozważenie naszych wyników w kontekście przestrzeni geodezyjnych pozwoli spojrzeć na dynamikę odwzorowań nieoddalających w sposób bardziej jednolity i spójny oraz uporządkuje część istniejących już wyników w tym temacie.

Niech (Y, d) będzie przestrzenią metryczną.

Definicja 1.33 ([37], [55], [81])
Krzywą $\gamma : [0, l] \to Y$, gdzie $l = d(x, y)$ i taką, że $\gamma(0) = x$, $\gamma(l) = y$, nazywamy *geodezyjną* łączącą punkty x i y, jeżeli

$$d(\gamma(t), \gamma(\tau)) = |t - \tau|$$

dla dowolnych $t, \tau \in [0, l]$. Obraz krzywej γ nazywamy *odcinkiem geodezyjnym* łączącym punkty x i y oraz będziemy go oznaczać jako $[x, y]$. Obraz odwzorowania $\sigma : [0, \infty) \to Y$ nazywamy *promieniem geodezyjnym.*

Co więcej, mówimy, że przestrzeń Y jest *geodezyjna*, jeżeli dla dowolnych dwóch punktów w Y istnieje geodezyjna, która je łączy. Jeżeli dla każdych dwóch punktów istnieje dokładnie jedna geodezyjna je łącząca, to przestrzeń nazywamy *jednoznacznie geodezyjną.*

Bardziej szczegółowe informacje na temat przestrzeni geodezyjnych i wiele ich własności można znaleźć przykładowo w [17], [78].

Przykład 1.34

1. Najprostszym przykładem przestrzeni geodezyjnej jest n wymiarowa przestrzeń euklidesowa $(\mathbb{R}^n, d_E)$ (dla $n \geqslant 0$), w której geodezyjnymi są liniowe, afiniczne odcinki.

2. Podobnie n wymiarowa sfera $\mathbb{S}^n$ (dla $n \geqslant 0$) jest przykładem takiej przestrzeni i w niej geodezyjnymi są podzbiory kół wielkich.

3. Dalej n wymiarowa przestrzeń hiperboliczna $\mathbb{H}^n$ (dla $n \geqslant 2$) jest przykładem przestrzeni geodezyjnej. W zależności od rozpatrywanego modelu odcinki geodezyjne mogą wyglądać inaczej, np. geodezyjną może być euklidesowy odcinek lub fragment okręgu prostopadły do brzegu przestrzeni (szczegóły można znaleźć np. w [78]).

4. Jeszcze innym przykładem są przestrzenie Teichmülera (również bardziej szczegółowo opisane w [78]).

Jednakże z punktu widzenia naszych dalszych rozważań i przedstawienia wniosków z naszych nowych wyników, należy zadać pytanie: czy zdefiniowane w podrozdziałach 1.1.1 i 1.1.2 przestrzenie metryczne są geodezyjne?

Niech C będzie domkniętym stożkiem w przestrzeni Banacha $(V, ||\cdot||)$. Jak wcześniej, gdy wprowadziliśmy definicję przestrzeni metrycznej Hilberta, rozważmy ściśle dodatni funkcjonał $\varphi \in V^*$. Wtedy zbiór

$$\Sigma_\varphi^\circ = \{x \in \mathrm{int}C : \varphi(x) = 1\}$$

wyposażony w metrykę Hilberta jest zupełną przestrzenią geodezyjną, której topologia pokrywa się z topologią normy, a geodezyjnymi są odcinki euklidesowe (zob. Wniosek 2.6.4. z [69], a także [70], [85]). Ogólnie nie jest to przestrzeń jednoznacznie geodezyjna. W pracy Lemmensa i Nussbauma [69] możemy znaleźć Twierdzenie 2.6.6/Wniosek 2.6.7, które określają warunki, aby przestrzeń z metryką Hilberta była jednoznacznie geodezyjna.

W pewnych szczególnych przypadkach można pokazać, że metryka Thompsona d_T jest przestrzenią geodezyjną (zob. Twierdzenie 2.6.9. [69]), a w swojej pracy B. Lemmens i M. Roelands podali warunki, aby była to przestrzeń jednoznacznie geodezyjna [72]. Jednakże nie będą to dla nas interesujące przestrzenie, dlatego nie omawiamy ich szerzej, a w naszych wnioskach będziemy dodatkowo zakładać, że przestrzeń (D, d_T) jest geodezyjna.

Rozważając pojęcie odległości Kobayashiego również możemy mówić o geodezyjnych, nazywanych *geodezyjnymi zespolonymi.*

Definicja 1.35 ([33], [87], [88])
Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym, wypukłym obszarem. Odwzorowanie holomorficzne $f : \Delta \to D$ nazywamy *geodezyjną zespoloną* względem k_D, jeżeli istnieją takie punkty $z, w \in \Delta$, $z \neq w$, że

$$d_\Delta(z, w) = k_D(f(z), f(w)).$$

Twierdzenie 1.36 ([19], [33])
Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym, wypukłym obszarem. Wtedy dla dowolnych, różnych punktów $z, w \in D$ istnieje zespolona geodezyjna, która je łączy.

W kontekście zastosowania twierdzenia Hopfa-Rinowa dla przestrzeni geodezyjnych warto postawić pytanie: jaka jest zależność pomiędzy przestrzeniami geodezyjnymi, a przestrzeniami z metryką wewnętrzną? Następne stwierdzenie daje nam odpowiedź na to pytanie (por. Stwierdzenie 2.4.2. [78]).

Stwierdzenie 1.37
Niech (Y, d) *będzie przestrzenią metryczną. Jeśli* (Y, d) *jest przestrzenią geodezyjną, to* (Y, d) *jest przestrzenią z metryką wewnętrzną.*

Przykład 1.38
Przykładem obrazującym, że przeciwna implikacja nie zachodzi jest $(\mathbb{R}^n \setminus \{p\}, d_E)$ dla $n \geqslant 2$. Istotnie, jeśli wybierzemy dwa różne punkty $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ takie, że punkt p leży na odcinku $[x, y]$, to nie istnieje geodezyjna łącząca te punkty, a przestrzeń jest przestrzenią z metryką wewnętrzną.

1.3 Horokule

Narzędziem niezbędnym do badania dynamiki odwzorowań nieoddalających jest pojęcie horokuli. Pierwsza definicja horokuli została podana przez J. Wolffa, z myślą uzupełnienia dowodu twierdzenia Wolffa-Denjoya. Istotę twierdzenia Wolffa-Denjoya wraz z jego historią szczegółowo przedstawimy w kolejnym rozdziale, ponieważ jego uogólnienia stanowią fundament i znaczną część niniejszej rozprawy. Jednakże ze względu na fakt, że kule rozpatrywane względem odległości Kobayashiego nie są niezmiennicze względem odwzorowania holomorficznego w siebie, określonego na kole jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej, nie było możliwe sformułowanie pełnego dowodu powyżej wspomnianego twierdzenia. J. Wolff rozwiązał ten problem zastępując kule w sensie Kobayashiego nowymi kulami o środku na brzegu koła, nazwanymi później *horokulami*, i pokazując ich niezmienniczość (zob. Twierdzenie 0.2 [1] oraz [2]). Następnie pojawiały się uogólnienia postawionej definicji w kontekstach różnych przestrzeni, wymiarów i odwzorowań. W literaturze możemy znaleźć szeroką gamę podejść do zdefiniowania tego pojęcia (zob. [1], [2], [12], [17], [55] [69]). My przypomnimy i będziemy używać ogólnych definicji wprowadzonych przez M. Abate [1].

Definicja 1.39 (por. Definicja 2.2.1 [2])
Niech (Y, d) będzie przestrzenią metryczną. *Małą horokulą* o środku w punkcie $\xi \in \partial Y$, biegunie $z_0 \in Y$ i promieniu $r \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$E_{z_0}(\xi, r) = \{y \in Y : \limsup_{w \to \xi} d(y, w) - d(w, z_0) \leqslant r\}.$$

Podobnie *dużą horokulą* nazywamy zbiór

$$F_{z_0}(\xi, r) = \{y \in Y : \liminf_{w \to \xi} d(y, w) - d(w, z_0) \leqslant r\}.$$

Przeprowadzając podobne rozumowanie jak w [[19], Lemat 5.1] pokażemy, że duża horokula jest zawsze zbiorem niepustym. (Niestety podobny dowod, tzn. aby pokazać niepustość małej horokuli, nie jest możliwy do przeprowadzenia.)

Stwierdzenie 1.40 ([49])
Załóżmy, że (Y, d) *jest właściwą przestrzenią geodezyjną spełniającą Aksjomat* 1*,* $z_0 \in Y$*,* $r \in \mathbb{R}$ *i* $\xi \in \partial Y$*. Wtedy duża horokula* $F_{z_0}(\xi, r)$ *jest niepusta.*

Dowód. Ustalmy $z_0 \in Y$, $\xi \in \partial Y$ i $r > 0$. Z Aksjomatu 1 wynika, że istnieje ciąg $\{y_n\} \subset Y$ zbieżny do punktu $\xi \in \partial Y$, taki że

$$d(y_n, z_0) \to \infty,$$

gdy $n \to \infty$. Zatem możemy założyć, że $d(y_n, z_0) > r$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Niech x_n będzie punktem na odcinku geodezyjnym $[z_0, y_n]$ takim, że $d(x_n, z_0) = r$. Korzystając z własności przestrzeni geodezyjnych otrzymujemy

$$d(y_n, z_0) = d(y_n, x_n) + d(x_n, z_0) = d(y_n, x_n) + r.$$

Ponieważ Y jest przestrzenią właściwą, domknięta kula $\bar{B}(z_0, r)$ jest zbiorem zwartym i stąd istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}$ ciągu $\{x_n\}$ zbieżny do pewnego punktu $x \in Y$, taki że $d(x_{n_k}, z_0) \to d(x, z_0) = r$, gdy $k \to \infty$. Stąd

$$\begin{aligned} \liminf_{w \to \xi} d(x, w) - d(w, z_0) &\leqslant \liminf_{k \to \infty} d(x, y_{n_k}) - d(y_{n_k}, z_0) \\ &= \liminf_{k \to \infty} d(x_{n_k}, y_{n_k}) - d(y_{n_k}, z_0) = -r. \end{aligned}$$

Zatem $x \in F_{z_0}(\xi, -r)$, co kończy dowód. ■

Wprowadzimy teraz lemat (Obserwacja 3.1. [55]) niezbędny w dowodzie kolejnego twierdzenia.

Lemat 1.41 ([55])
Niech $\{a_n\}$ będzie nieograniczonym od góry ciągiem liczb rzeczywistych. Wtedy istnieje nieskończenie wiele liczb $n \in \mathbb{N}$ takich, że

$$a_m < a_n$$

dla każdego $m < n$.

Niestety nie wiemy, czy mała horokula jest zawsze zbiorem niepustym. Jednakże korzystając z tego założenia, przedstawimy teraz twierdzenie, które jest uogólnieniem Twierdzenia 2.3 z [1] dotyczącego ograniczonych, wypukłych obszarów w $\mathbb{C}^n$ z pseudometryką Kobayashiego na ogólniejsze przestrzenie metryczne.

Twierdzenie 1.42 ([49])
Załóżmy, że (Y, d) jest przestrzenią metryczną spełniającą Aksjomat 1 i Aksjomat 4 oraz $f : Y \to Y$ jest odwzorowaniem nieoddalającym nie mającym ograniczonych orbit. Wtedy dla dowolnego $z_0 \in Y$ istnieje taki punkt $\xi \in \partial Y$, że

$$f^k(E_{z_0}(\xi, r)) \subset F_{z_0}(\xi, r)$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i $r \in \mathbb{R}$.

Dowód. Ustalmy $y, z_0 \in Y$. Ponieważ z założenia Y spełnia Aksjomat 1, z Uwagi 1.32 wynika, że Y jest właściwa, a stąd na mocy twierdzenia Całki mamy

$$\lim_{n \to \infty} d(f^n(y), z_0) = \infty.$$

Z Obserwacji 1.41 istnieje podciąg $\{f^{n_i}(y)\}$ ciągu $\{f^n(y)\}$, taki że

$$d(f^m(y), z_0) < d(f^{n_i}(y), z_0)$$

dla każdego $m < n_i,\ i = 1, 2, \ldots$. Następnie z Aksjomatu 1 wynika, że podciąg (jeżeli jest taka potrzeba możemy przejść do innego podciągu) $\{f^{n_i}(y)\}$ jest zbieżny w $\overline{Y}$ do pewnego punktu $\xi \in \partial Y$. Rzeczywiście, w przeciwnym przypadku ciąg $\{d(f^{n_i}(y), z_0)\}$ byłby ograniczony, a stąd na mocy twierdzenia Całki ciąg $\{d(f^n(y), z_0)\}$ byłby ograniczony, co stanowi sprzeczność z założeniem. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$ oraz niech $z \in E_{z_0}(\xi, r)$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\liminf_{w \to \xi} d(f^k(z), w) - d(w, z_0) &\leqslant \liminf_{i \to \infty} d(f^k(z), f^{n_i}(y)) - d(f^{n_i}(y), z_0) \\
&\leqslant \liminf_{i \to \infty} d(z, f^{n_i - k}(y)) - d(f^{n_i}(y), z_0) \\
&\leqslant \liminf_{i \to \infty} d(z, f^{n_i - k}(y)) - d(f^{n_i - k}(y), z_0) \\
&\leqslant \limsup_{i \to \infty} d(z, f^{n_i - k}(y)) - d(f^{n_i - k}(y), z_0).
\end{aligned}$$

Ponieważ

$$d(f^{n_i - k}(y), f^{n_i}(y)) \leqslant d(y, f^k(y)) = c$$

oraz $f^{n_i}(y) \to \xi$, wnioskujemy z Aksjomatu 4, że również $f^{n_i - k}(y) \to \xi$. Zatem

$$\liminf_{w \to \xi} d(f^k(z), w) - d(w, z_0) \leqslant \limsup_{w \to \xi} d(z, w) - d(w, z_0) \leqslant r.$$

Co kończy dowód. ∎

Następna uwaga przedstawia prostą własność dużych horokul, którą będziemy wykorzystywać w naszych rozważaniach. Symbole d, $\overline{d}$, występujące w górnym indeksie, zawsze będą oznaczać domknięcie danego zbioru odpowiednio w topologiach przestrzeni (Y, d) oraz $(\overline{Y}, \overline{d})$.

Uwaga 1.43
Niech (Y, d) będzie przestrzenią metryczną spełniającą Aksjomat 1 oraz niech $z_0 \in Y$ i $\zeta \in \partial Y$. Wtedy

$$\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\zeta, r)}^{\overline{d}} \subset \partial Y.$$

Dowód. Ustalmy $z_0 \in Y$ oraz $\zeta \in \partial Y$. Ze Stwierdzenia 1.40 wynika, że duża horokula jest zbiorem niepustym i stąd oraz z faktu, że mamy zstępującą rodzinę zbiorów zwartych, otrzymujemy

$$\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\zeta, r)}^{\overline{d}} \neq \emptyset.$$

Rozważmy $y \in \bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\zeta, r)}^{\overline{d}}$ oraz ciąg liczb rzeczywistych $\{r_n\}$ rozbieżny do $-\infty$. Załóżmy nie wprost, że $y \in Y$. Stąd $y \in \overline{F_{z_0}(\zeta, r_n)}^{\overline{d}} \cap Y$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ topologie pokrywają się na Y, to

$$\overline{F_{z_0}(\zeta, r_n)}^{\overline{d}} \cap Y = \overline{F_{z_0}(\zeta, r_n)}^{d} = F_{z_0}(\zeta, r_n).$$

Z definicji dużej horokuli i z nierówności trójkąta wynika, że

$$-d(y, z_0) \leqslant \liminf_{w \to \zeta} d(y, w) - d(w, z_0) \leqslant r_n$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $r_n \to -\infty$, gdy $n \to \infty$, otrzymujemy sprzeczność. Zatem $y \in \partial D$, co kończy dowód. ■

Karlsson w swojej pracy [55] oraz Lemmens i Nussbaum w [69] zauważają, że w przestrzeni metrycznej spełniającej Aksjomaty 1 i 2 każda horokula przecina brzeg w dokładnie jednym punkcie. Na koniec tego rozdziału przedstawimy nasz wynik pokazujący związek Aksjomatu 3 i faktu, że część wspólna domknięcia dużych horokul jest zbiorem jednopunktowym, co więcej jest to środek wszystkich horokul.

Lemat 1.44 ([49])
Jeżeli przestrzeń metryczna (Y, d) spełnia Aksjomat 3, $z_0 \in Y$, $\zeta \in \partial Y$ oraz $r \in \mathbb{R}$, to

$$\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\zeta, r)}^{\overline{d}} = \{\zeta\}.$$

DOWÓD. Ustalmy $z_0 \in Y$ i $\zeta \in \partial Y$. Identycznie jak w dowodzenie Uwagi 1.43 wnioskujemy, że

$$\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\zeta, r)}^{\overline{d}} \neq \emptyset.$$

Załóżmy, że $\eta \in \bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\zeta, r)}^{\overline{d}} \subset \partial Y$ i rozważmy ciąg liczb rzeczywistych $\{r_n\}$ rozbieżny do $-\infty$. Stąd $\eta \in \overline{F_{z_0}(\zeta, r_n)}^{\overline{d}}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i wtedy istnieje ciąg $\{z_i^{r_n}\}_{i \in \mathbb{N}}$ elementów ze zbioru $F_{z_0}(\zeta, r_n)$ taki, że

$$\overline{d}(z_i^{r_n}, \eta) \to 0,$$

gdy $i \to \infty$. Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $i_n \in \mathbb{N}$ taka, że $\overline{d}(z_{i_n}^{r_n}, \eta) < \frac{1}{n}$ oraz

$$\liminf_{w \to \zeta} d(z_{i_n}^{r_n}, w) - d(w, z_0) \leqslant r_n.$$

Z definicji granicy górnej istnieje ciąg $\{w_k^n\}_{k \in \mathbb{N}}$ zbieżny do $\zeta \in \partial Y$, taki że

$$\lim_{k \to \infty} d(z_{i_n}^{r_n}, w_k^n) - d(w_k^n, z_0) \leqslant r_n.$$

Wtedy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $w_{k_n}^n$, takie że $\overline{d}(w_{k_n}^n, \zeta) \leqslant \frac{1}{n}$ oraz

$$d(z_{i_n}^{r_n}, w_{k_n}^n) - d(w_{k_n}^n, z_0) \leqslant r_n + \frac{1}{n}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\lim_{n \to \infty} d(z_{i_n}^{r_n}, w_{k_n}^n) - d(w_{k_n}^n, z_0) = -\infty.$$

Na mocy Aksjomatu 3, $\overline{d}(w_{k_n}^n, \eta) \to 0$, ale również $\overline{d}(w_{k_n}^n, \zeta) \to 0$. Oznacza to, że $\eta = \zeta$ i stąd

$$\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\zeta, r)}^{\overline{d}} = \{\zeta\}.$$

Co kończy dowód. ■

Rozdział 2

Wcześniejsze badania

Odwzorowania nieoddalające, podobnie jak izometrie i kontrakcje, są jedną z podstawowych klas odwzorowań nieliniowych i wiele problemów analizy nieliniowej sprowadza się do rozważania dynamiki takich odwzorowań. Badania iteracji odwzorowań nieliniowych rozpoczęły się od studiowania iteracji odwzorowań holomorficznych, określonych na jednowymiarowych, ograniczonych obszarach w $\mathbb{C}$. W tym obszarze badań jednymi z pierwszych byli holenderski matematyk J. Wolff oraz francuski matematyk A. Denjoy. W 1926 roku udowodnili twierdzenie, które jest uogólnieniem Lematu Schwarza.

Twierdzenie 2.1
Niech $\Delta \subset \mathbb{C}$ będzie otwartym kołem jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej oraz niech $f : \Delta \to \Delta$ będzie odwzorowaniem holomorficznym, które nie jest odwzorowaniem identycznościowym oraz nie jest automorfizmem eliptycznym. Wtedy istnieje dokładnie jeden taki punkt $\xi \in \overline{\Delta}$, że ciąg iteracji $\{f^n\}$ przekształcenia f jest jednostajnie zbieżny na każdym zwartym podzbiorze Δ do ξ.

Powyższe twierdzenie zostało w 1926 roku udowodnione niejednokrotnie. Pierwszy dowód tego twierdzenia, metodą nie wprost, zaproponował sam J. Wolff (zob. [89]). Następnie, niezależnie od siebie, dowód sformułowali J. Wolff (zob. [90]) i A. Denjoy (zob. [91]). Wreszcie, ponownie J. Wolff podał trzeci dowód powyższego twierdzenia z wykorzystaniem nowych metod (zob. [91]). Wprowadził swoją definicję horokuli o środku w punkcie x i promieniu $R > 0$ jako zbiór

$$E(x, R) = \left\{ z \in \Delta : \frac{|x - z|^2}{1 - |z|^2} < R \right\}.$$

Następnie sformułował lemat nazwany Lematem Wolffa.

Lemat 2.2 ([91])
Niech $\Delta \subset \mathbb{C}$ będzie otwartym kołem jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej oraz niech $f : \Delta \to \Delta$ będzie odwzorowaniem holomorficznym, nie mającym punktów stałych. Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in \partial\Delta$, że dla dowolnego $z \in \Delta$,

$$\frac{|\xi - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leqslant \frac{|\xi - z|^2}{1 - |z|^2}.$$

W następnym rozdziale ponownie zapiszemy powyższy lemat, ale przy lekko zmienionych oznaczeniach oraz podamy jego uogólnienie, potrzebne do dalszych rozważań.

Większa część niniejszej rozprawy zostanie poświęcona rozważaniom na temat Twierdzenia 2.1. Jednakże skupimy się wyłącznie na przypadku, gdy odwzorowanie holomorficzne nie ma punktów stałych. Innymi słowy, mówiąc, że rozważamy uogólnienia twierdzenia Wolffa-Denjoya będziemy mieli na myśli uogólnienia następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.3 (Wolff-Denjoy)
Niech $\Delta \subset \mathbb{C}$ będzie otwartym kołem jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej oraz niech $f : \Delta \to \Delta$ będzie odwzorowaniem holomorficznym, które nie ma punktów stałych. Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in \partial\Delta$, że ciąg iteracji $\{f^n\}$ przekształcenia f jest jednostajnie zbieżny na każdym zwartym podzbiorze Δ do ξ.

Warto zauważyć, że Lemat Schwarza-Picka, który sformułowaliśmy w pierwszym rozdziale (Lemat 1.22), mówi, że każde odwzorowanie holomorficzne, określone na otwartym kole jednostkowym w siebie jest nieoddalające względem metryki Poincaré. Zatem możemy powiedzieć, że klasyczne twierdzenie Wolffa-Denjoya opisuje dynamikę odwzorowań nieoddalających, nie mających punktów stałych względem metryki Poincaré.

Twierdzenie Wolffa-Denjoya było na przestrzeni lat uogólniane w wielu kierunkach. Pierwsze wyniki w kontekście zmiennych zespolonych zostały sformułowane przykładowo w 1941 roku przez M. Heinsa [45], a także w 1963 roku przez M. Hevré [46], w 1983 roku przez B. MacCluera [74], albo w 1988 roku przez M. Abate [1].

Wyniki M. Hervé oraz B. MacCluera uogólnia twierdzenie Wolffa-Denjoya na kule jednostkowe w $\mathbb{C}^n$.

Twierdzenie 2.4 ([46])
Niech $B \subset \mathbb{C}^n$ będzie otwartą kulą jednostkową w przestrzeni ze standardową normą oraz niech $f : B \to B$ będzie odwzorowaniem holomorficznym, nie mającym punktu stałego. Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in \partial B$, że ciąg iteracji $\{f^n\}$ przekształcenia f dąży jednostajnie na każdym zwartym podzbiorze B do ξ.

M. Heins rozszerzył twierdzenie Wolffa-Denjoya na niejednospójne obszary w $\mathbb{C}$.

Twierdzenie 2.5 ([45])
Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie skończenie spójnym obszarem (tzn. takim, którego dopełnienie jest skończoną sumą składowych spójności) ograniczonym przez krzywą Jordana oraz niech $f : D \to D$ będzie odwzorowaniem holomorficznym, nie mającym punktów stałych. Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in \partial D$, że ciąg iteracji $\{f^n\}$ przekształcenia f dąży jednostajnie na każdym zwartym podzbiorze D do ξ.

W tym miejscu możnaby jeszcze podać kilkanaście innych, istotnych uogólnień twierdzenia Wolffa-Denjoya na różne typy przestrzeni, ale również na różne typy przekształceń. Wśród nich warto podkreślić wynik A. F. Beardona [12] dla odwzorowań nieoddalajcych względem metryki Hilberta, co było następnie uogólnione przez A. Karlssona [55], [56], A. Karlssona i G. A. Noskova [58], R. D. Nussbauma [76], czy B. Lemmensa [71]. W kontekście obszarów ściśle wypukłych w $\mathbb{C}^n$ z odległością Kobayashiego wyniki przedstawiła M. Budzyńska [19], co zostało później zaostrzone przez M. Abate i J. Raissy w [4]. Inne uogólnienia twierdzenia Wolffa-Denjoya zostały przedstawione przykładowo przez F. Bracciego [15], B. Piątek [80], T. Kuczumowa i S. Reicha [54], T. Casavecchia i S. Diaz-Madrigala [27], D. Schoikheta [82], czy L. Xu i H. Yanga [92].

My jednak skupimy się na dwóch wynikach, tj. pracach A. F. Beardona oraz M. Budzyńskiej, ponieważ te właśnie rezultaty stanowią punkt wyjścia do niniejszej rozprawy i będą szczególnymi przypadkami naszych wyników.

W jednej ze swoich prac [11] A. F. Beardon argumentuje, że twierdzenie Wolffa-Denjoya jest czysto geometrycznym wynikiem, zależnym jedynie od hiperbolicznych własności metryki i dowodzi jego odpowiednik dla dużej klasy tzw. widocznych rozmaitości, czyli rozmaitości Riemannowskich o ujemnej krzywiźnie z nieco silniejszym warunkiem $K \leqslant c < 0$. To pojęcie nie będzie nam potrzebne do dalszych rozważań, ale formalną definicję i więcej szczegółów można znaleźć przykładowo w [35].

Twierdzenie 2.6 (Twierdzenie 2 [11])
Niech $f : M \to M$ będzie odwzorowaniem kontrakcyjnym, określonym na dowolnej widocznej rozmaitości M w siebie. Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in \partial M$, że ciąg iteracji $\{f^n\}$ przekształcenia f dąży do ξ.

Następnie w roku 1997 Beardon [12] zaproponował ogólne podejście do twierdzenia Wolffa-Denjoya unikając jakichkolwiek założeń dotyczących gładkości rozważanej przestrzeni metrycznej. Udowodnił, że iteracje odwzorowania kontrakcyjnego zbiegają lokalnie jednostajnie do punktu na brzegu przestrzeni, o ile jest on w pewnym sensie podobny do brzegu przestrzeni hiperbolicznej. Główną obserwacją w pracy Beardona [12] było założenie, że twierdzenie Wolffa-Denjoya jest prawdziwe we właściwej przestrzeni metrycznej (Y, d) spełniającej warunek

$$d(x_n, y_n) - \max\{d(x_n, w), d(y_n, w)\} \to \infty,\ n \to \infty \tag{2.1}$$

dla dowolnych ciągów $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ w Y zbieżnych do dwóch różnych punktów leżących na brzegu Y oraz dla dowolnego $w \in Y$. Jak już wiemy z rozdziału pierwszego, warunek (2.1) nazywamy Aksjomatem 2.

Twierdzenie 2.7 (Twierdzenie 1 [12])
Załóżmy, że przestrzeń metryczna (X, d) i przestrzeń topologiczna $\overline{X}$ spełniają Aksjomaty 1 i 2 oraz załóżmy, że $f : X \to X$ jest odwzorowaniem kontrakcyjnym, będącym punktową granicą odwzorowań kontrakcyjnych f_j, z których każde ma punkt stały. Wtedy istnieje taki punkt $\zeta \in \overline{X}$, że ciąg iteracji $\{f^n\}$ zbiega lokalnie jednostajnie na X do punktu ζ.

Klasyczne twierdzenie Wolffa-Denjoya wynika jako szczególny przypadek powyższego twierdzenia przy użyciu własności geometrii hiperbolicznej, np. twierdzenia cosinusów. Jednocześnie Beardon zauważa, jak już wspomnieliśmy we wcześniejszym rozdziale, że przestrzeń metryczna Hilberta spełnia Aksjomaty 1 i 2, ten drugi jako konsekwencję wariantu twierdzenia o przecinających się cięciwach. Zatem powyższe twierdzenie można zastosować do klasy przestrzeni wprowadzonych przez Hilberta. Co więcej, Karlsson [55] zauważył, że założenie o granicy punktowej odwzorowań kontrakcyjnych f_j można pominąć.

Twierdzenie 2.8 ([**12**])
Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem. Jeżeli $f : (D, d_H) \to (D, d_H)$ jest odwzorowaniem kontrakcyjnym bez punktów stałych, wtedy istnieje takie $\xi \in \partial D$, że iteracje f^n przekształcenia f zbiegają jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

Założenie o kontrakcyjności odwzorowania zostało później osłabione przez Karlssona.

Twierdzenie 2.9 (Wniosek 3.7 [55])
Niech (Y, d) będzie właściwą przestrzenią metryczną spełniającą Aksjomaty 1 i 2. Jeżeli $f : Y \to Y$ jest odwzorowaniem nieoddalającym, to orbity odwzorowania f są ograniczone lub ciąg $\{f^n\}$ dąży do punktu na brzegu przestrzeni Y.

W 2012 roku M. Budzyńska [19] przedstawiła inne uogólnienie twierdzenia Wolffa-Denjoya dla obszarów w $\mathbb{C}^n$.

Twierdzenie 2.10 (Twierdzenie 5.3 [19])
Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^n$ i niech $f : D \to D$ będzie odwzorowaniem holomorficznym, nie mającym punktów stałych. Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in \partial D$, że ciąg iteracji $\{f^n\}$ odwzorowania f zbiega w zwarto-otwartej topologii do stałego odwzorowania ξ.

Twierdzenie 1.27, będące uogólnieniem Lematu Schwarza-Picka, pokazuje nam, że odwzorowanie holomorficzne jest nieoddalające względem odległości Kobayashiego. Okazuje się, że możemy uogólnić powyższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.11
Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem. Jeżeli $f : (D, k_D) \to (D, k_D)$ jest odwzorowaniem nieoddalającym bez punktów stałych, wtedy istnieje $\xi \in \partial D$, takie że iteracje f^n przekształcenia f zbiegają jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

W geometrii Hilberta geodezyjnymi są m.in. odcinki euklidesowe, co czasami znacznie upraszcza rozważania. Nie możemy spodziewać się takiego regularnego zachowania w przypadku geodezyjnych z odległością Kobayashiego [4],[19]. Argumenty w przypadku obszarów w $\mathbb{C}^n$ są bardziej złożone i naturalną rzeczą jest próba ich udoskonalenia.

Oczywiste pytanie jakie się pojawia, to w jakim stopniu rezultaty Beardona, Budzyńskiej i Karlssona wchodzą ze sobą w interakcję i czy można uzyskać ogólniejszy rezultat zawierający wspomniane wyniki jako szczególne przypadki?

Jak powiedzieliśmy wcześniej, przy założeniu Aksjomatu 1 i 2 prawdziwy jest Aksjomat 3, a stąd Aksjomat 4. Zatem pierwsze pytanie jakie się pojawia, to czy można wzmocnić rezultat Beardona osłabiając Aksjomaty? Co więcej, w rozdziale pierwszym udowodniliśmy, że zarówno metryka Hilberta i odległość Kobayashiego spełniają warunek (C). Stąd kolejne pytanie, czy jest prawdziwe ogólne twierdzenie Wolffa-Denjoya dla przestrzeni metrycznych spełniających warunek (C)?

W kolejnym rozdziale odpowiemy na to pytanie i przedstawimy nasze wyniki stanowiące kolejne uogólnienia twierdzenia Wolffa-Denjoya w przestrzeniach skończenie wymiarowych.

Można również się zastanawiać co wiemy o twierdzeniu Wolffa-Denjoya w przypadku nieskończenie wymiarowym. Przykładowo, rozważając nieskończenie wymiarową, zespoloną przestrzeń Banacha, twierdzenie Wolffa-Denjoya nie zachodzi, jeżeli nie wzmocnimy założeń o odwzorowaniu. Jednym z pierwszych wyników było twierdzenie zaproponowane w 1997 roku przez C. H. Chu i P. Mellon [29].

Twierdzenie 2.12 ([29])
Załóżmy, że $B_H \subset H$ jest otwartą kulą jednostkową w zespolonej przestrzeni Hilberta oraz niech $f : B_H \to B_H$ będzie zwartym odwzorowaniem holomorficznym nie mającym punktu stałego. Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in \partial B_H$, że ciąg iteracji $\{f^n\}$ przekształcenia f zbiega jednostajnie na każdym zwartym podzbiorze B_H do ξ.

Przypadek nieskończenie wymiarowy rozważał również Nussbaum [76]. Co więcej, serię uogólnień twierdzenia Wolffa-Denjoya w przypadku nieskończenie wymiarowym podali następnie Budzyńska, Kuczumow i Reich [21], [22], [23].

Najpierw podali oni wynik w przypadku zwartych odwzorowań holomorficznych, określonych na ograniczonych, ściśle wypukłych obszarach w refleksywnych przestrzeniach Banacha.

Twierdzenie 2.13 (Twierdzenie 4.1 [21])
Niech D będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem w zespolonej i refleksywnej przestrzeni Banacha $(X, ||\cdot||)$ oraz niech $f : D \to D$ będzie zwartym odwzorowaniem holomorficznym nie mającym punktów stałych. Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in \partial D$, że ciąg $\{f^n\}$ iteracji odwzorowania f zbiega w zwarto-otwartej topologii do odwzorowania stałego ξ.

Następnie ogólniej, dla odwzorowań nieoddalających względem odległości Kobayashiego, określonych na ograniczonych, ściśle wypukłych obszarach w dowolnej zespolonej przestrzeni Banacha.

Twierdzenie 2.14 (Twierdzenie 4.1 [22])
Niech D będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem w dowolnej zespolonej przestrzeni Banacha $(X, ||\cdot||)$ oraz niech $f : D \to D$ będzie zwartym odwzorowaniem k_D-nieoddalającym, nie mającym punktów stałych. Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in \partial D$, że ciąg iteracji $\{f^n\}$ odwzorowania f zbiega w ograniczono-otwartej topologii do odwzorowania stałego ξ.

Ponownie korzystając z Twierdzenia 1.27, natychmiastowo można sformułować twierdzenie typu Wolffa-Denjoya dla ograniczonych, ściśle wypukłych obszarów w dowolnej zespolonej przestrzeni Banacha.

Twierdzenie 2.15 (Twierdzenie 4.2 [22])
Niech D będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem w dowolnej zespolonej przestrzeni Banacha $(X, ||\cdot||)$ oraz niech $f : D \to D$ będzie zwartym odwzorowaniem holomorficznym nie mającym punktów stałych. Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in \partial D$, że ciąg iteracji $\{f^n\}$ odwzorowania f zbiega w ograniczono-otwartej topologii do odwzorowania stałego ξ.

Kolejne pytanie jakie możemy postawić, to czy jest możliwe otrzymanie ogólnego twierdzenia Wolffa-Denjoya w przestrzeniach geodezyjnych nieskończenie wymiarowych, obejmującego wcześniejsze wyniki jako szczególne przypadki? Na to pytanie odpowiemy w czwartym rozdziale.

Do tej pory podaliśmy uogólnienia dyskretnego twierdzenia Wolffa-Denjoya, tzn. dla iteracji danego odwzorowania. Osobnym problemem badawczym może być badanie dynamiki półgrupy danej klasy odwzorowań. Tym problemem również się zajmiemy.

M. Abate [3] scharakteryzował zbieżności półgrup odwzorowań holomorficznych określonych na gładkich, silnie wypukłych obszarach w siebie. W 2013 roku M. Abate i J. Raissy przy pomocy Twierdzenia 6 [4] podali uogólnienie wyniku Abate zauważając, że założenie gładkości obszaru nie jest potrzebne.

Twierdzenie 2.16 (Wniosek 2 [4])
Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem oraz niech $S = \{f_t : D \to D\}_{t \geqslant 0}$ będzie jednoparametrową półgrupą odwzorowań holomorficznych nie mającą punktów stałych. Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in \partial D$, że półgrupa S zbiega do odwzorowania stałego ξ.

Warto jeszcze wspomnieć, że w 2019 roku badaniem zachowania się półgrupy odwzorowań holomorficznych zajmowali się F. Bracci, M. D. Contreras, D. Díaz-Madrigal, H. Gaussier i A. Zimmer [16] oraz G. Kelgiannis w przypadku nieeliptycznych półgrup (więcej szczegółów można znaleźć przykładowo w [59]).

Dodatkowo M Budzyńska, T. Kuczumow i S. Reich [23] sformułowali twierdzenie typu Wolffa-Denjoya dla odwzorowań nieoddalających względem odległości Kobayashiego.

Twierdzenie 2.17 (Twierdzenie 7.2 [23])
Niech D będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^n$ oraz niech $S = \{f_t : D \to D\}_{t \geqslant 0}$ będzie jednoparametrową, ciągłą półgrupą odwzorowań k_D-nieoddalających. Jeżeli S nie ma wspólnego punktu stałego w D, to istnieje taki punkt $\xi \in \partial D$, że S dąży jednostajnie na każdym zwartym podzbiorze D do ξ.

Można byłoby podać jeszcze wiele innych uogólnień twierdzenia Wolffa-Denjoya. Krótko jednak omówiliśmy te przypadki, które są najistotniejsze z punktu widzenia niniejszej rozprawy. W kolejnych rozdziałach sformułujemy nasze wyniki wraz z dowodami i zobaczymy jako wnioski wiele z powyższych rezultatów.

Rozdział 3

Twierdzenie Wolffa-Denjoya w przestrzeniach skończenie wymiarowych

W rozdziale trzecim przedstawimy nowe wyniki dotyczące twierdzenia Wolffa-Denjoya we właściwych przestrzeniach geodezyjnych. Będzie się on składał z dwóch zasadniczych części, tj. wyników w przypadku dyskretnym, tzn. dla iteracji odwzorowań nieliniowych oraz wyników w przypadku ciągłym dla jednoparametrowych półgrup odwzorowań nieliniowych. Dodatkowo, w obu przypadkach sformułujemy, wraz z dowodami, twierdzenia typu Wolffa-Denjoya dla ściśle wypukłych podzbiorów n wymiarowych rzeczywistych lub zespolonych przestrzeni wektorowych. Na końcu jako szczególne przypadki otrzymamy istniejące już wyniki, wspomniane we wcześniejszym rozdziale, względem różnych metryk takich jak metryka Hilberta, Thompsona, czy pseudometryka Kobayashiego.

3.1 Przypadek dyskretny

3.1.1 Twierdzenie Wolffa-Denjoya we właściwych przestrzeniach geodezyjnych

Na początku określmy i uporządkujmy w jakich przestrzeniach będziemy prowadzić nasze rozważania w tej sekcji. Po pierwsze będziemy przedstawiać nasze wyniki w tytułowych przestrzeniach geodezyjnych (Def. 1.33). Ze Stwierdzenia 1.37 wynika, że jednocześnie nasza przestrzeń będzie z metryką wewnętrzną. Dalej będziemy zawsze zakładać, że (Y, d) jest zupełną, lokalnie zwartą przestrzenią metryczną. Zatem z twierdzenia Hopfa-Rinowa (Tw. 1.8) możemy wnioskować, że (Y, d) jest przestrzenią właściwą, co na mocy Uwagi 1.32 implikuje, że (Y, d) spełnia Aksjomat 1.

Jak już wspomnieliśmy w sekcji 1.3 rozdziału pierwszego, bardzo ważnym narzędziem wykorzystywanym do badania twierdzeń typu Wolffa-Denjoya są horokule. Sam J. Wolff jako pierwszy zdefiniował to pojęcie i użył go do sformułowania zamiennika mocnego lematu Schwarza, nazwanego Lematem Wolffa (zob. Twierdzenie 0.2 [1]).

Lemat 3.1 ([1])
Jeżeli $f : \Delta \to \Delta$ jest odwzorowaniem holomorficznym nie posiadającym punktów stałych, to istnieje taki punkt $x \in \partial\Delta$, że dla dowolnego $R > 0$,

$$f(E(x,R)) \subset E(x,R),$$

gdzie $E(x,R)$ oznacza horokulę zdefiniowaną przez Wolffa [zob. [1]].

Następnie, M. Abate podał odpowiednik Lematu Wolffa dla odwzorowań holomorficznych w siebie określonych na wypukłych obszarach w $\mathbb{C}^n$ (Twierdzenie 2.3 [1]) i wykorzystał go w dowodzie twierdzenia typu Wolffa-Denyoja (Twierdzenie 0.6. [1]).

Powyższym rozważaniem chcę podkreślić użyteczność i znaczenie naszego wyniku jakim jest Twierdzenie 1.42 oczywiście pod warunkiem, że mała horokula $E_{z_0}(\xi, r)$ jest zbiorem niepustym dla dowolnego $r \in \mathbb{R}$. Jednakże nie wiadomo, czy jest to ogólnie prawda, nawet dla ściśle wypukłych obszarów w $\mathbb{C}^n$ z odległością Kobayashiego. W dalszej części tego rozdziału pokażemy jak sobie poradzić z tym problemem.

Następujący lemat, z punktu widzenia naszych późniejszych rozważań, jest niezbędnym narzędziem.

Lemat 3.2 ([49])
Niech (Y,d) będzie geodezyjną, zupełną, lokalnie zwartą przestrzenią metryczną. Załóżmy, że $f : Y \to Y$ jest odwzorowaniem nieoddalającym bez ograniczonych orbit. Wtedy istnieje takie $\xi \in \partial Y$, że dla dowolnego $z_0 \in Y$, $r \in \mathbb{R}$ i ciągu liczb naturalnych $\{a_n\}$ istnieją $z \in Y$ i podciąg $\{a_{n_k}\}$ ciągu $\{a_n\}$, takie że

$$f^{a_{n_k}}(z) \in F_{z_0}(\xi, r)$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Dodatkowo, jeżeli (Y,d) spełnia Aksjomat 4, to

$$\xi \in \bigcap_{r\in\mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{d}.$$

Dowód. Ustalmy $y \in Y$. Ponieważ z założenia odwzorowanie f nie ma ograniczonych orbit, to ciąg odległości $\{d_n\}$, zdefiniowany jako $d_n = d(f^n(y), y)$, jest nieograniczony. Na mocy twierdzenia Całki (Tw. 1.11) wnioskujemy więc, że $d_n \to \infty$, gdy $n \to \infty$. Z Lematu 1.41 istnieje ciąg liczb naturalnych $\{\varphi(i)\}$ taki, że $d_m < d_{\varphi(i)}$ dla $m < \varphi(i),\ i = 1, 2, \ldots$. Ponieważ Y spełnia Aksjomat 1, przechodząc do innego podciągu, jeśli jest taka potrzeba, możemy założyć, że ciąg $\{f^{\varphi(i)}(y)\}$ dąży do pewnego punktu $\xi \in \partial Y$ z brzegu przestrzeni. Ustalmy $r > 0$ oraz ciąg liczb naturalnych $\{a_n\}$. Na każdym odcinku geodezyjnym

$$[y, f^{\varphi(i)-a_1}(y)] \subset Y$$

(zakładając, że $\varphi(i) > a_1$ i $d(f^{\varphi(i)-a_1}(y), y) > r$) łączącym punkty y oraz $f^{\varphi(i)-a_1}(y)$ wybierzmy taki punkt $z^1_{\varphi(i)}$, że $d(z^1_{\varphi(i)}, y) = r$. Ponieważ przestrzeń (Y,d) jest właściwa, istnieje podciąg $\{\varphi_1(i)\}$ ciągu $\{\varphi(i)\}$, taki że $\{z^1_{\varphi_1(i)}\}$ zbiega do pewnego $z_1 \in Y$. Stąd

$$\lim_{i\to\infty} d(z_1, f^{\varphi_1(i)-a_1}(y)) - d(f^{\varphi_1(i)-a_1}(y), y) = -d(z_1, y) = -r.$$

Postępując indukcyjnie dla każdego $n > 1$, rozważmy punkty y i $f^{\varphi_{n-1}(i)-a_n}(y)$ oraz geodezyjną je łączącą

$$[y, f^{\varphi_{n-1}(i)-a_n}(y)] \subset Y$$

(zakładając, że $\varphi_{n-1}(i) > a_n$ i $d(f^{\varphi_{n-1}(i)-a_n}(y), y) > r$). Wybierzmy na każdym odcinku geodezyjnym taki punkt $z^n_{\varphi_{n-1}(i)}$, że $d(z^n_{\varphi_{n-1}(i)}, y) = r$ oraz podciąg $\{\varphi_n(i)\}$ ciągu $\{\varphi_{n-1}(i)\}$, taki że $\{z^n_{\varphi_n(i)}\}$ dąży do pewnego $z_n \in Y$. Stąd

$$\lim_{i\to\infty} d(z_n, f^{\varphi_n(i)-a_n}(y)) - d(f^{\varphi_n(i)-a_n}(y), y) = -d(z_n, y) = -r.$$

Ponieważ Y jest właściwa, istnieje podciąg $\{z_{n_k}\}$ ciągu $\{z_n\}$ zbieżny do pewnego $z \in Y$, taki że $d(z_{n_k}, z) < \frac{1}{2}$ dla każdego k. Stosując metodę przekątniową otrzymujemy, że istnieje podciąg $\{\psi(i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ każdego ciągu $\{\varphi_n(i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, taki że

$$d(z, f^{\psi(i)-a_{n_k}}(y)) - d(f^{\psi(i)-a_{n_k}}(y), y) < -r + 1$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i $i \geqslant k$. Stąd i z faktu, że odwzorowanie f jest nieoddalające, dla każdego a_{n_k} otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\liminf_{w\to\xi} d(f^{a_{n_k}}(z), w) - d(w, y) &\leqslant \limsup_{i\to\infty} d(f^{a_{n_k}}(z), f^{\psi(i)}(y)) - d(f^{\psi(i)}(y), y) \\
&\leqslant \limsup_{i\to\infty} d(z, f^{\psi(i)-a_{n_k}}(y)) - d(f^{\psi(i)}(y), y) \\
&\leqslant \limsup_{i\to\infty} d(z, f^{\psi(i)-a_{n_k}}(y)) - d(f^{\psi(i)-a_{n_k}}(y), y) \\
&\leqslant -r + 1.
\end{aligned}$$

Korzystając z nierówności trójkąta,

$$d(w, z_0) - d(z_0, y) \leqslant d(w, y),$$

a stąd oraz z powyższych oszacowań mamy

$$\liminf_{w\to\xi} d(f^{a_{n_k}}(z), w) - d(w, z_0) \leqslant -r + 1 + d(z_0, y)$$

dla każdego $z_0 \in Y$. Ponieważ $r > 0$ jest dowolną liczbą, mamy że $f^{a_{n_k}}(z) \in F_{z_0}(\xi, r)$, co kończy pierwszą część dowodu.

Udowodnimy teraz, że $\xi \in \bigcap_{r\in\mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^d$. Kładąc $a_i = \varphi(i)$ zauważmy, że dla każdego $z_0 \in Y$ i $r \in \mathbb{R}$ istnieją $\tilde{z} \in Y$ oraz podciąg $\{\varphi(i_k)\}$ ciągu $\{\varphi(i)\}$, takie że $f^{\varphi(i_k)}(\tilde{z}) \in F_{z_0}(\xi, r)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ

$$d(f^{\varphi(i_k)}(y), f^{\varphi(i_k)}(\tilde{z})) \leqslant d(y, \tilde{z}),$$

wnioskujemy z Aksjomatu 4, że $f^{\varphi(i_k)}(\tilde{z}) \to \xi$. Zatem $\xi \in \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^d$ i z dowolności promienia horosfery $r \in \mathbb{R}$ ostatecznie mamy $\xi \in \bigcap_{r\in\mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^d$, co kończy dowód. ■

Następne twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia Wolffa-Denjoya we właściwych przestrzeniach geodezyjnych i jednocześnie stanowi jeden z naszych najważniejszych wyników.

Twierdzenie 3.3 ([49])
Niech (Y,d) będzie zupełną, lokalnie zwartą przestrzenią geodezyjną spełniającą Aksjomat 4 oraz załóżmy, że dla każdego $\zeta \in \partial Y$ i $z_0 \in Y$ iloczyn domknięć dużych horokul $\bigcap_{r\in\mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\zeta,r)}^{\overline{d}}$ jest zbiorem jednopunktowym. Jeżeli $f : Y \to Y$ jest odwzorowaniem nieoddalającym bez ograniczonych orbit, to istnieje takie $\xi \in \partial Y$, że iteracje f^n przekształcenia f zbiegają jednostajnie na ograniczonych podzbiorach przestrzeni Y do ξ.

Dowód. Zauważmy, że wszystkie założenia Lematu 3.2 są spełnione, zatem istnieje $\xi \in \partial Y$, które spełnia jego tezę, w szczególności

$$\bigcap_{r\in\mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi,r)}^{\overline{d}} = \{\xi\}.$$

Ustalmy $y \in Y$ i ponieważ z założenia f nie ma ograniczonych orbit, wybierzmy dowolnie podciąg $\{f^{a_n}(y)\}$ ciągu iteracji odwzorowania f zbieżny do pewnej $\eta \in \partial Y$. Pokażemy, że $\eta = \xi$. Ustalmy $r \in \mathbb{R}$. Z Lematu 3.2 wynika, że istnieją podciąg $\{a_{n_k}\}$ ciągu $\{a_n\}$ oraz $z \in Y$, takie że

$$f^{a_{n_k}}(z) \in F_{z_0}(\xi,r) \ \text{ dla } \ k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Z faktu, że f jest nieoddalające

$$d(f^{a_{n_k}}(y), f^{a_{n_k}}(z)) \leqslant d(y,z). \tag{3.2}$$

Z (3.2) i z Aksjomatu 4 wnioskujemy, że ciąg $\{f^{a_{n_k}}(z)\}$ również zbiega do η. Stąd i z (3.1) otrzymujemy, że $\eta \in \overline{F_{z_0}(\xi,r)}^{\overline{d}}$ dla każdego $r \in \mathbb{R}$. Zatem

$$\eta \in \bigcap_{r\in\mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi,r)}^{\overline{d}} = \{\xi\}.$$

Czyli $\eta = \xi$ i $f^{a_n}(y) \to \xi$ dla każdego zbieżnego podciągu $\{f^{a_n}(y)\}$. Zatem $f^n(y) \to \xi$ dla każdego $y \in Y$. Teraz pokażemy zbieżność na ograniczonych podzbiorach Y. Załóżmy nie wprost, że istnieje $\overline{d}$-otwarte otoczenie $U \subset \overline{Y}$ punktu ξ, ograniczony zbiór $K \subset Y$ oraz ciąg $\{y_n\} \subset K$ taki, że $f^n(y_n) \notin U$ dla każdego $n \in N$. Wtedy

$$d(f^n(y_n), f^n(y)) \leqslant d(y_n, y) \leqslant \operatorname{diam} K \tag{3.3}$$

dla dowolnego $y \in K$. Ponieważ $f^n(y) \to \xi$ oraz zachodzi (3.3), z Aksjomatu 4 wnioskujemy, że $f^n(y_n) \to \xi \in \overline{Y} \setminus U$, co stanowi sprzeczność. ■

Przedstawimy teraz odpowiednik twierdzenia Wolffa-Denjoya dla odwzorowań kontrakcyjnych we właściwych przestrzeniach geodezyjnych.

Twierdzenie 3.4 ([49])
Niech (Y,d) będzie geodezyjną, zupełną, lokalnie zwartą przestrzenią metryczną spełniającą Aksjomat 4 i załóżmy, że dla każdego $\zeta \in \partial Y$ i $z_0 \in Y$ iloczyn domknięć dużych horokul $\bigcap_{r\in\mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\zeta,r)}^{\overline{d}}$ jest zbiorem jednopunktowym. Jeżeli $f : Y \to Y$ jest odwzorowaniem kontrakcyjnym, to istnieje takie $\xi \in \overline{Y}$, że iteracje f^n przekształcenia f zbiegają jednostajnie na ograniczonych podzbiorach przestrzeni Y do ξ.

DOWÓD. Jeżeli założymy, że $f : Y \to Y$ jest odwzorowaniem bez ograniczonych orbit, wniosek wynika bezpośrednio z Twierdzenia 3.3. Załóżmy zatem, że ciąg $\{f^n(y)\}$ jest ograniczony dla każdego $y \in Y$. Ustalmy $y \in Y$. Ponieważ przestrzeń jest właściwa, istnieje podciąg $\{f^{n_i}(y)\}$ ciągu $\{f^n(y)\}$ zbieżny do pewnego $z \in Y$. Zdefiniujmy ciąg odległości określony jako

$$d_n = d(f^n(y), f^{n+1}(y)), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Ponieważ f jest przekształceniem kontrakcyjnym, ciąg $\{d_n\}$ jest malejący i stąd zbieżny do pewnego η, gdy $n \to \infty$. Rozważając dwa podciągi $\{d_{n_i}\}$ oraz $\{d_{n_i+1}\}$ ciągu $\{d_n\}$ zauważmy, że

$$\eta \leftarrow d_{n_i} = d(f^{n_i}(y), f^{n_i+1}(y)) \to d(z, f(z))$$

oraz

$$\eta \leftarrow d_{n_i+1} = d(f^{n_i+1}(y), f^{n_i+2}(y)) \to d(f(z), f^2(z)).$$

Stąd

$$\eta = d(z, f(z)) = d(f(z), f^2(z)).$$

Jeżeli z i $f(z)$ są dwoma różnymi punktami to otrzymujemy sprzeczność z faktem, że f jest odwzorowaniem kontrakcyjnym, zatem $f(z) = z$. Ponieważ ciąg $\{d(f^n(y), z)\}$ jest malejący otrzymujemy, że $f^n(y) \to z \in Y$, gdy $n \to \infty$ dla dowolnego $y \in Y$.

Udowodnimy teraz jednostajną zbieżność na ograniczonych podzbiorach przestrzeni Y. W tym celu wybierzmy ograniczony zbiór $D \subset Y$. Ponieważ przestrzeń jest właściwa, zbiór $C = \overline{D}$ jest zwarty. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i wybierzmy takie $y_1, \ldots, y_k \in C$, że

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{k} B\Big(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Ze zbieżności punktowej wynika, że istnieje n_0, takie że dla każdego $n \geqslant n_0$,

$$\sup_{i=1,\ldots,k} d(f^n(y_i), z) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wybierzmy $y \in C$, wtedy $d(y, y_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ dla pewnego i. Stąd, z nierówności trójkąta oraz z faktu, że odwzorowanie f jest nieoddalające otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(f^n(y), z) &\leqslant d(f^n(y), f^n(y_i)) + d(f^n(y_i), z) \\ &\leqslant d(y, y_i) + d(f^n(y_i), z) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ponieważ $y \in C$ został wybrany dowolnie mamy

$$\sup_{y \in C} d(f^n(y), z) \to 0,$$

gdy $n \to \infty$, co kończy dowód.

■

Przypomnijmy, że przy założeniu Aksjomatu 1, Aksjomat 3 implikuje Aksjomat 4 oraz w Lemacie 1.44 udowodniliśmy, że Aksjomat 3 możemy zastąpić faktem, iż przecięcie domknięć dużych horokul jest zbiorem jednopunktowym. Stąd możliwe jest przeformułowanie naszych powyższych wyników, tj. Twierdzenia 3.3 i Wniosku 3.4, w następujący sposób.

Twierdzenie 3.5 ([49])
Niech (Y, d) będzie zupełną, lokalnie zwartą przestrzenią geodezyjną spełniającą Aksjomat 3. Jeżeli $f : Y \to Y$ jest odwzorowaniem nieoddalającym bez ograniczonych orbit, to istnieje takie $\xi \in \partial Y$, że iteracje f^n przekształcenia f zbiegają jednostajnie na ograniczonych podzbiorach przestrzeni Y do ξ.

Wniosek 3.6 ([49])
Niech (Y, d) będzie zupełną, lokalnie zwartą przestrzenią geodezyjną spełniającą Aksjomat 3. Jeżeli $f : Y \to Y$ jest odwzorowaniem kontrakcyjnym, to istnieje takie $\xi \in \overline{Y}$, że iteracje f^n przekształcenia f zbiegają jednostajnie na ograniczonych podzbiorach przestrzeni Y do ξ.

3.1.2 Twierdzenie Wolffa-Denjoya dla obszarów ściśle wypukłych

W tej sekcji V zawsze będzie oznaczało skończenie wymiarową (rzeczywistą lub zespoloną) wektorową przestrzeń unormowaną. Niech $D \subset V$ będzie ograniczonym otwartym podzbiorem V. Definiujemy brzeg jako $\partial D = \overline{D}^{\|\cdot\|} \setminus D$, gdzie $\overline{D}^{\|\cdot\|}$ oznacza domknięcie zbioru D względem topologii normy. Dla ułatwienia zapisu wprowadźmy również domknięty i otwarty odcinek łączący punkty x i y w zbiorze D odpowienio jako

$$[z, w] = \{sz + (1 - s)w : s \in [0, 1]\} \quad \text{oraz} \quad (z, w) = \{sz + (1 - s)w : s \in (0, 1)\}.$$

Rozpoczniemy od dowodu prostego lematu (zob. Lemat 1 [4]).

Lemat 3.7 ([4])
Niech $D \subset V$ będzie wypukłym obszarem. Wtedy

(i) $(z, w) \subset D$ dla dowolnego $z \in D$ i $w \in \partial D$;

(ii) jeżeli $z, w \in \partial D$, to $(z, w) \subset \partial D$ albo $(z, w) \subset D$.

Dowód.

(i) Niech $z \in D$, $w \in \partial D$ i ustalmy $s \in (0, 1)$. Udowodnimy, że $sz + (1 - s)w \in D$. Ponieważ D jest otwarty i $z \in D$, istnieje kula o środku w tym punkcie $B(z, r) \subset D$. Niech $r' < r \cdot \frac{s}{1-s}$ i wybierzmy taki $w' \in D$, że $\|w - w'\| < r'$. Wtedy

$$sz + (1 - s)w = sz' + (1 - s)w', \tag{3.4}$$

gdzie

$$z' = z + \frac{1 - s}{s}(w - w').$$

Zatem

$$\|z - z'\| < \frac{1 - s}{s} r' < r$$

i stąd $z' \in B(z, r) \subset D$. Z faktu, że D jest zbiorem wypukłym i z (3.4) otrzymujemy, że $sw + (1 - s)z \in D$.

(ii) Załóżmy, że $(z, w) \subsetneq \partial D$, stąd istnieje punkt $y \in (z, w) \cap D$. Zatem z (i) $(z, y) \subset D$ i $(y, w) \subset D$. W konsekwencji $(z, w) \subset D$, co kończy dowód.

■

Przedmiotem tego podrozdziału jest zastosowanie wyników z wcześniejszej sekcji 3.1.1 do przypadku ściśle wypukłych obszarów $D \subset V$.

Definicja 3.8 ([4], [19])
Niech $D \subset V$ będzie ograniczonym i wypukłym obszarem. Mówimy, że zbiór D jest *ściśle wypukły*, jeżeli dla dowolnych punktów $x, y \in \overline{D}$ otwarty odcinek

$$(x, y) = \{z \in D : z = \alpha x + (1 - \alpha)y \quad \text{dla} \;\; \alpha \in (0, 1)\}$$

zawiera się w zbiorze D.

Od teraz będziemy zakładać, że (D, d) jest przestrzenią metryczną, której topologia pokrywa się na D z topologią normy przestrzeni $(\overline{D}^{||\cdot||}, ||\cdot||)$. Przypomnijmy, że główny wynik z poprzedniego podrozdziału zachodzi przy założeniach, że właściwa, geodezyjna przestrzeń metryczna spełnia Aksjomaty 1 i 3. Chcąc rozważyć nasz główny wynik w przypadku obszarów ściśle wypukłych rozpoczniemy od przeniesienia tych Aksjomatów. Nasz następny lemat, chociaż sformułowany dla podzbiorów przestrzeni skończenie wymiarowych, zachodzi również w dowolnej właściwej przestrzeni.

Lemat 3.9 ([49])
Załóżmy, że D jest ograniczonym obszarem w V oraz (D, d) jest zupełną przestrzenią geodezyjną. Wtedy (D, d) spełnia Aksjomat 1.

Dowód. Rozważmy ciąg $\{x_n\} \subset D$ zbieżny do $\xi \in \partial D$. Pokażemy, że $d(x_n, y) \to \infty$ dla dowolnego $y \in D$. Załóżmy nie wprost, że istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}$ ciągu $\{x_n\}$, taki że $d(x_{n_k}, y) \leqslant c$ dla pewnego $y \in D$ i stałej $c > 0$. Ponieważ (D, d) jest przestrzenią lokalnie zwartą, z twierdzenia Hopfa-Rinowa wnioskujemy, że (D, d) jest właściwa, a stąd istnieje podciąg $\{x_{n_{k_l}}\}$ ciągu $\{x_{n_k}\}$, który w (D, d) zbiega do pewnego $x_0 \in D$. Ponieważ na D topologia przestrzeni (D, d) pokrywa się z topologią normy, otrzymujemy, że ciąg $\{x_{n_{k_l}}\}$ dąży do $x_0 \in D$ również względem normy. Stanowi to sprzeczność, ponieważ D jest zbiorem otwartym i stąd $\xi = x_0 \notin \partial D$. ■

Następne stwierdzenie zachodzi dla przestrzeni spełniających warunek (C) (str. 16).

Stwierdzenie 3.10 ([49])
Załóżmy, że D jest ograniczonym, wypukłym obszarem w V i przestrzeń metryczna (D, d) spełnia warunek (C). Jeżeli $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ są ciągami w D, zbieżnymi do punktów z brzegu przestrzeni odpowiednio do ξ i η oraz jeżeli dla pewnego $w \in D$

$$d(x_n, y_n) - d(y_n, w) \to -\infty,$$

to $[\xi, \eta] \subset \partial D$.

Dowód. Rozważmy dwa ciągi $\{x_n\}, \{y_n\} \subset D$, takie że $x_n \to \xi, \; y_n \to \eta, \; \xi, \eta \in \partial D$ oraz

$$d(x_n, y_n) - d(y_n, w) \to -\infty \tag{3.5}$$

dla pewnego $w \in D$. Załóżmy nie wprost, że $s\xi + (1 - s)\eta \in D$ dla pewnego $s \in (0, 1)$. Wtedy, korzystając z nierówności trójkąta, (3.5) oraz warunku (C) mamy

$$d(sx_n + (1 - s)y_n, w) \geqslant d(w, y_n) - d(y_n, sx_n + (1 - s)y_n) \geqslant d(w, y_n) - d(y_n, x_n) \to +\infty.$$

Ponieważ

$$||sx_n + (1-s)y_n - (s\xi + (1-s)\eta)|| \leqslant s||x_n - \xi|| + (1-s)||y_n - \eta|| \to 0$$

i topologie (D, d) oraz $(\overline{D}, \|\cdot\|)$ pokrywają się na D, otrzymujemy

$$d(s\xi + (1-s)\eta, w) \to +\infty.$$

Co stanowi sprzeczność i kończy dowód. ■

Natępny lemat jest natychmiastową konsekwencją Stwierdzenia 3.10.

Lemat 3.11 ([49])
Załóżmy, że D jest ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem w V oraz przestrzeń (D, d) spełnia warunek (C). Jeżeli $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ są ciągami w Y, $x_n \to \xi \in \partial D$ oraz jeżeli dla pewnego $w \in D$

$$d(x_n, y_n) - d(y_n, w) \to -\infty,$$

to $y_n \to \xi$. Innymi słowy, (D, d) spełnia Aksjomat 3.

Dowód. Rozważmy dwa ciągi $\{x_n\}, \{y_n\} \subset D$ i niech $x_n \to \xi \in \partial D$ oraz

$$d(x_n, y_n) - d(y_n, w) \to -\infty$$

dla pewnego $w \in D$. Załóżmy nie wprost, że ciąg $\{y_n\}$ nie jest zbieżny do ξ, tzn. istnieje taki podciąg $\{y_{n_k}\}$ ciągu $\{y_n\}$, że $y_{n_k} \to \eta$, gdy $k \to \infty$, oraz $\xi \neq \eta$. Co więcej, $x_{n_k} \to \xi$, gdy $k \to \infty$, jako podciąg ciągu zbieżnego. Ze Stwierdzenia 3.10 wynika, że $[\xi, \eta] \subset \partial D$. Z założenia zbiór D jest ściśle wypukły, więc odcinek redukuje się do jednego punktu, a stąd $\xi = \eta$, co stanowi sprzeczność. ■

Zdefiniujemy teraz pojęcie, pierwotnie wprowadzone przez M. Edelsteina [36] w przypadku jednostajnie wypukłych przestrzeni Banacha, które stanowi klasyczny argument w metrycznej teorii punktów stałych.

Niech (Y, d) będzie przestrzenią metryczną. Załóżmy, że $\{x_n\}$ jest ograniczonym ciągiem punktów w Y. Wtedy dla dowolnego $y \in Y$ możemy zdefiniować $r(y, x_n)$ jako

$$r(y, \{x_n\}) = \limsup_{n\to\infty} d(y, x_n).$$

Definicja 3.12 ([7], [80])
Liczbę postaci

$$r(\{x_n\}) := \inf_{y \in Y} r(y, \{x_n\})$$

nazywamy *promieniem asymptotycznym* ciągu $\{x_n\}$. Co więcej, każdy punkt y, dla którego zachodzi

$$r(y, \{x_n\}) = r(\{x_n\})$$

nazywamy *asymptotycznym centrum* ciągu $\{x_n\}$.

W następnych dwóch uwagach zdefiniujemy tak zwane asymptotyczne centrum z ε i pokażemy jego proste własności, przydatne w dalszych rozważaniach.

Uwaga 3.13
Niech $D \subset V$, $\{x_n\} \subset D$ będzie ciągiem ograniczonym oraz $r = r(\{x_n\})$. Zdefiniujmy zbiór

$$A_\varepsilon = \{y \in D : \limsup_{n\to\infty} d(y, x_n) \leqslant r + \varepsilon\}$$

i zauważmy, że

$$\{y \in D : \limsup_{n\to\infty} d(y, x_n) = r\} = A = \bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon.$$

Dowód. Jeżeli $y \in A$, tzn. $\limsup_{n\to\infty} d(y, x_n) = r$, to oczywiste jest, że dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi $\limsup_{n\to\infty} d(y, x_n) \leqslant r + \varepsilon$. Aby pokazać inkluzję w drugą stonę weźmy $y \in \bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon$. Oznacza to, że dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} d(y, x_n) \leqslant r + \varepsilon,$$

a stąd $\limsup_{n\to\infty} d(y, x_n) \leqslant r$, co oznacza, że $y \in A$. ∎

Uwaga 3.14
Niech A_ε będzie zbiorem zdefiniowanym jak we wcześniejszej uwadze. Zauważmy, że

$$\overline{A_\varepsilon}^{||\cdot||} = \overline{A_\varepsilon}^{d} = A_\varepsilon.$$

Dowód. Oczywiste jest, że $\overline{A_\varepsilon}^{d} \subset \overline{A_\varepsilon}^{||\cdot||}$. Aby pokazać inkluzję w drugą stronę weźmy $z \in \overline{A_\varepsilon}^{||\cdot||}$. Jeśli $z \in Y$, to z faktu, że topologie pokrywają się na Y, otrzymujemy $z \in \overline{A_\varepsilon}^{d}$. Jeżeli natomiast $z \in \partial Y$, to istnieje taki ciąg $\{z_n\} \subset A_\varepsilon$, że $||z_n - z|| \to 0$, gdy $n \to \infty$. Z Aksjomatu 1 wnioskujemy, że

$$d(z_n, w) \to \infty \tag{3.6}$$

dla pewnego $w \in Y$. Z drugiej strony weźmy $z_1, z_2 \in A_\varepsilon$ i zauważmy, że

$$d(z_1, z_2) \leqslant \limsup_{n\to\infty} d(z_1, x_n) + \limsup_{n\to\infty} d(x_n, z_2) \leqslant 2r + 2\varepsilon. \tag{3.7}$$

Co oznacza, że $\operatorname{diam} A_\varepsilon \leqslant 2r + 2\varepsilon$ oraz

$$d(z_n, w) \leqslant d(z_n, z_0) + d(z_0, w) \leqslant 2r + 2\varepsilon + d(z_0, w).$$

Stąd $d(z_n, w) \nrightarrow \infty$, gdy $n \to \infty$, co jest sprzeczne z (3.6).

Inkluzja $A_\varepsilon \subset \overline{A_\varepsilon}^{d}$ jest oczywista. Weźmy zatem $z \in \overline{A_\varepsilon}^{d}$. Jest to równoważne z tym, że istnieje taki ciąg $\{z_n\} \subset A_\varepsilon$ że $d(z_n, z) \to 0$, $n \to \infty$. Zauważmy, że dla dowolnego n,

$$\limsup_{k\to\infty} d(z, x_k) \leqslant d(z, z_n) + \limsup_{k\to\infty} d(z_n, x_k) \leqslant d(z, z_n) + r + \varepsilon.$$

Stąd

$$\limsup_{k\to\infty} d(z, x_k) \leqslant \lim_{n\to\infty} d(z, z_n) + r + \varepsilon = r + \varepsilon,$$

co kończy dowód. ∎

Twierdzenie 3.5 w połączeniu z Lematem 3.9, Lematem 3.11 i klasycznym argumentem w teorii punktów stałych pozwala nam uzyskać główny rezultat w tym podrozdziale. Warto zaznaczyć, że nie będzie nam potrzebne żadne założenie o hiperboliczności dla metryki.

Twierdzenie 3.15 ([49])
Załóżmy, że D jest ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem w V oraz (D, d) jest zupełną przestrzenią geodezyjną, spełniającą warunek (C), której topologia pokrywa się z topologią normy. Jeżeli $f : D \to D$ jest odwzorowaniem nieoddalającym bez punktów stałych, wtedy istnieje takie $\xi \in \partial D$, że iteracje f^n przekształcenia f zbiegają jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

Dowód. Z Lematu 3.11 wynika, że przestrzeń metryczna (D, d) spełnia Aksjomat 3. Jeżeli odwzorowanie $f : D \to D$ nie ma ograniczonych orbit, teza wynika bezpośrednio z Lematu 3.9 i Twierdzenia 3.5. Załóżmy zatem, że ciąg $\{f^n(y)\}$ jest ograniczony dla pewnego (a stąd również dla każdego) $y \in D$. Niech

$$r(\{f^n(y)\}) = \inf_{z \in D} \limsup_{n \to \infty} d(z, f^n(y))$$

oznacza asymptotyczny promień ciągu $\{f^n(y)\}$, natomiast zbiór

$$A = \{x \in D : \limsup_{n \to \infty} d(x, f^n(y)) = r(\{f^n(y)\})\}$$

jest asymptotycznym centrum. Dodatkowo rozpatrzmy zbiory A_ε jak w Uwadze 3.13. Z faktu, że przekształcenie f jest nieoddalające wynika, że dla dowolnego $x \in A_\varepsilon$,

$$\limsup_{n \to \infty} d(f(x), f^n(y)) \leqslant \limsup_{n \to \infty} d(x, f^{n-1}(y)) = \limsup_{n \to \infty} d(x, f^n(y)),$$

co pokazuje, że zbiór A_ε jest niezmienniczy względem f, tzn. $f(A_\varepsilon) \subset A_\varepsilon$. Z Uwagi 3.14 oraz (3.7) wynika, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$, A_ε jest niepustym zbiorem ograniczonym oraz domkniętym względem d i względem $|| \cdot ||$, a stąd zbiorem zwartym, ponieważ przestrzeń jest właściwa. Zatem

$$A = \bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon$$

jest niepusty i zwarty. Zauważmy, że

$$f(A) = f(\bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon) \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} f(A_\varepsilon) \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon = A,$$

co oznacza, że $f(A) \subset A$. Co więcej, ponieważ z założenia D jest wypukły i (D, d) spełnia warunek (C), zbiór A jest również wypukły. Na mocy twierdzenia Brouwera o punkcie stałym odwzorowanie f ma punkt stały, co jest sprzeczne z założeniem. ■

Podobnie jak we wcześniejszym podrozdziale, sformułujemy teraz wariant twierdzenia typu Wolffa-Denjoya dla odwzorowań kontrakcyjnych.

Twierdzenie 3.16 ([49])
Załóżmy, że D jest ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem w V oraz (D, d) jest zupełną przestrzenią geodezyjną, spełniającą warunek (C), której topologia pokrywa się z topologią normy. Jeżeli $f : D \to D$ jest odwzorowaniem kontrakcyjnym, wtedy istnieje takie $\xi \in \overline{D}$, że iteracje f^n przekształcenia f zbiegają jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

W rozdziale pierwszym pokazaliśmy, że omówione przez nas metryki Hilberta i Thompsona spełniają warunek (C) (Lemat 1.17 i Lemat 1.20). W szczególności zatem Twierdzenie 3.15 jest prawdziwe dla przestrzeni metrycznych Hilberta i Thompsona i możemy sformułować następujące wnioski.

Wniosek 3.17 (zob. Twierdzenie 1, 1a [12])
Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem. Jeżeli $f : (D, d_H) \to (D, d_H)$ jest odwzorowaniem nieoddalającym bez punktów stałych, wtedy istnieje takie $\xi \in \partial D$, że iteracje f^n przekształcenia f zbiegają jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

Wniosek 3.18 ([49])
Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem. Jeżeli (D, d_T) jest przestrzenią geodezyjną i $f : (D, d_T) \to (D, d_T)$ jest odwzorowaniem nieoddalającym bez punktów stałych, wtedy istnieje takie $\xi \in \partial D$, że iteracje f^n przekształcenia f zbiegają jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

Wniosek 3.17 został pokazany przez Beardona, który udowodnił odpowiednik klasycznego twierdzenia o odcinkach siecznych, a następnie pokazał, że ograniczony, ściśle wypukły obszar z metryką Hilberta (D, d_H) spełnia Aksjomat 2.

Wniosek 3.18 wydaje się być nowym wynikiem (por. [71, Twierdzenie 3.2]).

Ponieważ, jak pokazaliśmy w Lemacie 1.28, odległość Kobayashiego również spełnia warunek (C), podobny wniosek z Twierdzenia 3.15 jest prawdziwy dla ograniczonych, ściśle wypukłych obszarów w $\mathbb{C}^n$ z odległością Kobayashiego.

Wniosek 3.19 ([19])
Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem. Jeżeli $f : (D, k_D) \to (D, k_D)$ jest odwzorowaniem nieoddalającym bez punktów stałych, wtedy istnieje takie $\xi \in \partial D$, że iteracje f^n przekształcenia f zbiegają jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

Wniosek 3.19 został udowodniony przez M. Budzyńską (zob. Twierdzenie 5.3 [19]) przy użyciu twierdzenia Earle-Hamiltona oraz własności horokul.

3.2 Przypadek ciągły

W tej części pracy przeniesiemy wyniki z wcześniejszego podrozdziału na przypadek ciągły, tzn. sformułujemy i udowodnimy twierdzenia typu Wolffa-Denjoya w przypadku półgrup odwzorowań nieoddalających w przestrzeniach geodezyjnych. Rozpoczniemy od zdefiniowania jednoparametrowych, ciągłych półgrup odwzorowań nieoddalających i sformułowania ich niezbędnych własności. Warto zaznaczyć, że sformułujemy, wraz z dowodem, odpowiednik twierdzenia Całki dla półgrup, który nie występuje w literaturze. Natępnie podamy twierdzenia typu Wolffa-Denjoya we właściwych przestrzeniach geodezyjnych oraz wersję tego twierdzenia dla obszarów ściśle wypukłych; na koniec sformułujemy wnioski płynące z naszych rozważań.

3.2.1 Jednoparametrowa, ciągła półgrupa

Niech (Y, d) będzie przestrzenią metryczną.

Definicja 3.20 ([28], [84])
Rodzinę $S = \{f_t : Y \to Y \mid t \in [0, \infty)\}$ nazywamy *jednoparametrową, ciągłą półgrupą*, jeżeli dla dowolnych $s, t \in [0, \infty)$

$$f_{s+t} = f_t \circ f_s$$

oraz dla każdego $y \in Y$ istnieje granica

$$\lim_{t \to 0^+} f_t(y) = f_0(y) = y.$$

W następnym lemacie zdefiniujemy zbiór K potrzebny w dalszej części pracy i korzystając z ciągłości półgrupy udowodnimy, że jest on zwarty.

Lemat 3.21 ([50])
Niech $S = \{f_t : Y \to Y\}_{t \geqslant 0}$ będzie jednoparametrową, ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających na Y, niech C będzie zwartym podzbiorem Y i $t_0 > 0$. Wtedy

$$K = \{f_s(x) : 0 \leqslant s \leqslant t_0,\ x \in C\} = \bigcup_{0 \leqslant s \leqslant t_0} f_s(C)$$

jest zwarty.

Dowód. Niech $\{f_{s_n}(x_n)\} \subset K$ będzie takim ciągiem, że $x_n \in C$ oraz $s_n \in [0, t_0]$. Ponieważ C jest zbiorem zwartym, istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}$ ciągu $\{x_n\}$ zbieżny do pewnego x_0, podczas gdy ze zwartości przedziału $[0, t_0]$ możemy założyć, że podciąg $\{s_{n_k}\}$ ciągu $\{s_n\}$ jest zbieżny do pewnego s_0. Zauważmy, że z ciągłości półgrupy, $f_{s_{n_k}}(x_0) \to f_{s_0}(x_0)$, gdy $s_{n_k} \to s_0$. Korzystając z tego faktu, z nierówności trójkąta oraz z nieoddalania odwzorowania $f_{s_{n_k}}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(f_{s_{n_k}}(x_{n_k}), f_{s_0}(x_0)) &\leqslant d(f_{s_{n_k}}(x_{n_k}), f_{s_{n_k}}(x_0)) + d(f_{s_{n_k}}(x_0), f_{s_0}(x_0)) \\ &\leqslant d(x_{n_k}, x_0) + d(f_{s_{n_k}}(x_0), f_{s_0}(x_0)) \to 0. \end{aligned}$$

Stąd $f_{s_{n_k}}(x_{n_k}) \to f_{s_0}(x_0)$, gdy $k \to \infty$. Co pokazuje, że zbiór K jest zwarty. ■

Będziemy również potrzebować odpowiednika twierdzenia Całki dla półgrup. Idea dowodu będzie pokrywać się z dowodem Twierdzenia 1.11, ale przedstawimy jego pełny dowód, ponieważ wynik wydaje się być interesujący i niespotykany wcześniej w literaturze.

Definicja 3.22
Orbitą półgrupy $S = \{f_t : Y \to Y\}_{t \geqslant 0}$ w punkcie $x \in Y$ nazywamy zbiór

$$O_S(x) = \{f_t(x) : t \in [0, \infty)\}.$$

Uwaga 3.23
Założenie, że półgrupa $S = \{f_t : Y \to Y\}_{t \geqslant 0}$ ma nieograniczone orbity będzie oznaczało, że istnieje taki ciąg liczb nieujemnych $\{t_k\}$ oraz $x \in Y$, że $f_{t_k}(x) \to \infty$, gdy $k \to \infty$.

Dodatkowo zauważmy, że jeżeli jednoparametrowa półgrupa odwzorowań nieoddalających $S = \{f_t : Y \to Y\}_{t\geqslant 0}$ ma ograniczoną orbitę, tzn. istnieje taka stała $M > 0$ oraz $y \in Y$, że dla dowolnego $t \geqslant 0$,

$$d(y, f_t(y)) \leqslant M,$$

wtedy wszystkie orbity są ograniczone, ponieważ

$$d(y, f_t(z)) \leqslant d(y, f_t(y)) + d(f_t(y), f_t(z)) \leqslant M + d(y, z) \tag{3.8}$$

dla dowolnego $z \in Y$.

Twierdzenie 3.24 ([50])
Załóżmy, że (Y, d) jest właściwą przestrzenią metryczną. Niech $x_0 \in Y$ oraz niech $S = \{f_t : Y \to Y\}_{t\geqslant 0}$ będzie jednoparametrową, ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających. Jeżeli istnieje ciąg liczb rzeczywistych $\{s_k\}$, taki że ciąg $\{f_{s_k}(x_0)\}$ jest ograniczony, wtedy orbita $O_S(x_0)$ półgrupy S w punkcie x_0 jest ograniczona.

Dowód. Ustalmy $x_0 \in Y$ i rozważmy jednoparametrową półgrupę odwzorowań nieoddalających $S = \{f_t : Y \to Y\}_{t\geqslant 0}$. Niech

$$O_S(x_0) = \{f_t(x_0),\, t \geqslant 0\}$$

będzie orbitą półgrupy S w punkcie x_0 i niech $\{s_k\}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych, takim że ciąg $\{f_{s_k}(x_0)\}$ jest ograniczony. Ponieważ Y jest przestrzenią właściwą, możemy założyć, że ciąg $\{f_{s_k}(x_0)\}$ jest zbieżny do pewnego x. Stąd istnieje k_0, takie że $f_{s_k}(x_0) \in B(x, \frac{1}{2})$ dla każdego $k \geqslant k_0$. Rozważmy zbiór B postaci

$$B = \overline{O_S(x_0)} \cap \bar{B}(x, 1).$$

Ponieważ przestrzeń Y jest właściwa, zbiór B jest zwarty. Stąd istnieje skończona liczba kul $B(x_i, \frac{1}{2})$, $x_i \in O_S(x_0)$, $i = 1, \ldots, N$, które pokrywają zbiór B. Niech $\{m_i\}$ będzie takim ciągiem liczb rzeczywistych, że $x_i = f_{m_i}(x_0)$ dla dowolnego i oraz rozważmy liczbę k wystarczająco dużą, aby $s_k - m_i \geqslant 1$ dla $i = 1, \ldots, N$ oraz

$$f_{s_k}(x_0) = f_{s_k - m_i}(f_{m_i}(x_0)) = f_{s_k - m_i}(x_i) \in B\Big(x, \frac{1}{2}\Big). \tag{3.9}$$

Dla $i \in \{1, \ldots, N\}$ rozpatrzmy zbiory B_i postaci

$$B_i = \overline{O_S(x_0)} \cap \bar{B}\Big(x_i, \frac{1}{2}\Big)$$

i następnie wybierzmy $y \in B_i$. Stosując nierówność trójkąta, fakt, że $f_{s_k - m_i}$ jest odwzorowaniem nieoddalającym oraz (3.9) mamy

$$d(f_{s_k - m_i}(y), x) \leqslant d(f_{s_k - m_i}(y), f_{s_k - m_i}(x_i)) + d(f_{s_k - m_i}(x_i), x) \leqslant 1.$$

Ponieważ y został wybrany dowolnie, $f_{s_k - m_i}(B_i) \subset B$ dla każdego i. Niech $\overline{s} = \max_{i=1,\ldots,N}\{s_k - m_i\} \geqslant 1$. Wtedy dla dowolnego $t > \overline{s}$ otrzymujemy

$$f_t(B) \subset \bigcup_{i=1}^{N} f_t(B_i) = \bigcup_{i=1}^{N} f_{t-(s_k - m_i)}(f_{s_k - m_i}(B_i)) \subset \bigcup_{i=1}^{N} f_{t-(s_k - m_i)}(B) \subset \bigcup_{s\leqslant t-1} f_s(B). \tag{3.10}$$

Ustalmy $t_0 \in [\overline{s}, \overline{s}+1)$. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnimy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i $t \leqslant t_0 + n$,

$$f_t(B) \subset \bigcup_{0 \leqslant s \leqslant \overline{s}} f_s(B).$$

Wiemy, że

$$f_t(B) \subset \bigcup_{s \leqslant t-1} f_s(B) \subset \bigcup_{s \leqslant t_0 - 1} f_s(B) \subset \bigcup_{s \leqslant \overline{s}} f_s(B) \quad \text{dla} \;\; t \leqslant t_0.$$

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że

$$f_t(B) \subset \bigcup_{0 \leqslant s \leqslant \overline{s}} f_s(B)$$

dla każdego $t \leqslant t_0 + n$. Zatem z (3.10) otrzymujemy

$$f_t(B) \subset \bigcup_{s \leqslant t_0 + n} f_s(B) \subset \bigcup_{0 \leqslant s \leqslant \overline{s}} f_s(B) \quad \text{dla} \;\; t \leqslant t_0 + n + 1.$$

Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej otrzymujemy

$$f_t(B) \subset \bigcup_{0 \leqslant s \leqslant \overline{s}} f_s(B)$$

dla każdego $t \geqslant 0$. Ponieważ z Lematu 3.21 zbiór $\bigcup_{0 \leqslant s \leqslant \overline{s}} f_s(B)$ jest ograniczony oraz $f_{s_{k_0}}(x_0) \in B$ otrzymujemy, że cała orbita $O_S(x_0)$ jest również ograniczona, co kończy dowód. ∎

3.2.2 Twierdzenie Wolffa-Denjoya we właściwych przestrzeniach geodezyjnych

Przedstawimy teraz główny wynik tego podrozdziału, tzn. twierdzenie Wolffa-Denjoya dla jednoparametrowych, ciągłych półgrup odwzorowań nieoddalających w zupełnych, lokalnie zwartych przestrzeniach geodezyjnych. Podobnie jak wcześniej, na mocy twierdzenia Hopfa-Rinowa (Tw. 1.8) oraz Uwagi 1.32 możemy wnioskować, że rozważana przestrzeń jest właściwa oraz spełnia Aksjomat 1.

Twierdzenie 3.25 ([50])
Niech (Y, d) będzie zupełną, lokalnie zwartą przestrzenią geodezyjną spełniającą Aksjomat 4 oraz załóżmy, że dla każdego $\zeta \in \partial Y$ i $z_0 \in Y$ iloczyn domknięć dużych horokul $\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\zeta, r)}$ jest zbiorem jednopunktowym. Jeżeli $S = \{f_t : Y \to Y\}_{t \geqslant 0}$ jest jednoparametrową, ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających na Y bez ograniczonych orbit, to istnieje takie $\xi \in \partial Y$, że półgrupa S zbiega jednostajnie na ograniczonych podzbiorach Y do ξ.

Dowód. Ustalmy $t_0 > 0$ i wybierzmy ograniczony zbiór $D \subset Y$. Ponieważ przestrzeń Y jest właściwa mamy, że zbiór $C = \overline{D}$ jest zwarty. Na mocy Lematu 3.21 otrzymujemy, że zbiór K zdefiniowany jako

$$K = \{f_s(x) : 0 \leqslant s \leqslant t_0, \; x \in C\} = \bigcup_{0 \leqslant s \leqslant t_0} f_s(C) \subset Y$$

również jest zwarty, a stąd ograniczony. Ustalmy $y \in Y$. Z definicji półgrupy zauważmy, że

$$f_{nt_0}(y) = f_{t_0}^n(y) \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Z twierdzenia Całki dla półgrup (Twierdzenie 3.24) otrzymujemy, że $d(f_{nt_0}(y), y) \to \infty$, gdy $n \to \infty$. Zatem z Twierdzenia 3.3,

$$\sup_{y \in K} \overline{d}(f_{nt_0}(y), \xi) \to 0, \tag{3.11}$$

gdy $n \to \infty$. Zauważmy, że

$$f_t(x) = f_{nt_0+s}(x) = f_{nt_0}(f_s(x)) \in f_{nt_0}(K)$$

dla dowolnych $x \in C$, $t > 0$, takich że $t = nt_0 + s$ oraz $n \in \mathbb{N}$, $s \in [0, t_0)$. Zatem

$$\sup_{x \in C} \overline{d}(f_t(x), \xi) = \sup_{x \in C} \overline{d}(f_{nt_0}(f_s(x)), \xi) \leqslant \sup_{y \in K} \overline{d}(f_{nt_0}(y), \xi)$$

i korzystając z (3.11) otrzymujemy, że

$$\sup_{x \in C} \overline{d}(f_t(x), \xi) \to 0,$$

gdy $t \to \infty$. Co kończy dowód. ∎

Z Lematu 1.44 wynika, że w powyższym twierdzeniu założenie o jednopunktowym przecięciu domknięć dużych horokul $\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\zeta, r)}$ możemy zastąpić Aksjomatem 3. Wtedy Twierdzenie 3.25 natychmiastowo implikuje następujący rezultat.

Wniosek 3.26 ([50])
Niech (Y, d) będzie zupełną, lokalnie zwartą przestrzenią geodezyjną spełniającą Aksjomat 3. Jeżeli $S = \{f_t : Y \to Y\}_{t \geqslant 0}$ jest jednoparametrową, ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających na Y bez ograniczonych orbit, to istnieje takie $\xi \in \partial Y$, że półgrupa S zbiega jednostajnie na ograniczonych podzbiorach Y do ξ.

Zauważmy, że jeżeli jedno z odwzorowań $f_{t_0} : Y \to Y$ z półgrupy S jest przekształceniem kontrakcyjnym, to otrzymamy silniejszy wynik.

Twierdzenie 3.27 ([50])
Niech (Y, d) będzie zupełną, lokalnie zwartą przestrzenią geodezyjną spełniającą Aksjomat 4 oraz załóżmy, że dla każdego $\zeta \in \partial Y$ i $z_0 \in Y$ iloczyn domknięć dużych horokul $\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\zeta, r)}$ jest zbiorem jednopunktowym. Jeżeli $S = \{f_t : Y \to Y\}_{t \geqslant 0}$ jest jednoparametrową, ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających na Y i istnieje takie $t_0 > 0$, że $f_{t_0} : Y \to Y$ jest odwzorowaniem kontrakcyjnym, wtedy istnieje takie $\xi \in \overline{Y}$, że półgrupa S zbiega jednostajnie na ograniczonych podzbiorach Y do ξ.

Dowód. W pierwszym przypadku załóżmy, że półgrupa $S = \{f_t : Y \to Y\}_{t \geqslant 0}$ ma nieograniczone orbity. Wtedy teza wynika bezpośrednio z Twierdzenia 3.25. Załóżmy zatem, że orbita $\{f_t(y)\}_{t \geqslant 0}$ jest ograniczona dla każdego $y \in Y$ (tak samo jak w (3.8)). Z założenia istnieje takie $t_0 > 0$, że $f_{t_0} : Y \to Y$ jest odwzorowaniem kontrakcyjnym. Ustalmy $y_0 \in Y$.

Ponieważ przestrzeń Y jest właściwa, istnieje podciąg $\{f_{n_k t_0}(y_0)\}$ ciągu $\{f_{nt_0}(y_0)\}$ zbieżny do pewnego $z_0 \in Y$. Z faktu, że odwzorowanie f_{t_0} jest nieoddalające wynika, że ciąg $\{d_n\}$ zdefiniowany następująco

$$d_n = d(f_{nt_0}(y_0), f_{nt_0+t_0}(y_0)), \quad n = 1, 2, \ldots$$

jest nierosnący i stąd zbieżny do pewnej η, gdy $n \to \infty$. Wybierzmy dwa podciągi $\{d_{n_k}\}$ i $\{d_{n_k+1}\}$ ciągu $\{d_n\}$. Wtedy

$$\eta \leftarrow d_{n_k} = d(f_{n_k t_0}(y_0), f_{n_k t_0+t_0}(y_0)) \to d(z_0, f_{t_0}(z_0))$$

oraz

$$\eta \leftarrow d_{n_k+1} = d(f_{n_k t_0+t_0}(y_0), f_{n_k t_0+t_0+t_0}(y_0)) \to d(f_{t_0}(z_0), f_{2t_0}(z_0)).$$

Zatem

$$\eta = d(z_0, f_{t_0}(z_0)) = d(f_{t_0}(z_0), f_{2t_0}(z_0)). \tag{3.12}$$

Ponieważ f_{t_0} jest odwzorowaniem kontrakcyjnym, jeżeli z_0 i $f_{t_0}(z_0)$ są różnymi punktami powinniśmy otrzymać

$$d(f_{t_0}(z_0), f_{2t_0}(z_0)) < d(z_0, f_{t_0}(z_0)),$$

co stanowi sprzeczność z (3.12). Zatem $f_{t_0}(z_0) = z_0$. Co więcej, ponieważ ciąg odległości $\{d(f_{nt_0}(y_0), z_0)\}$ jest malejący, otrzymujemy

$$f_{nt_0}(y_0) \to z_0 \in Y,$$

gdy $n \to \infty$. Zauważmy teraz, że jeśli wybierzemy dowolnie $y \in Y$, to wcześniejszy argument implikuje, że $f_{nt_0}(y)$ zbiega do punktu stałego odwzorowania f_{t_0} dla każdego $y \in Y$. Jednakże odwzorowania kontrakcyjne mogą mieć co najwyżej jeden punkt stały. Zatem $f_{nt_0}(y) \to z_0$, gdy $n \to \infty$ dla dowolnego $y \in Y$.

Udowodnimy teraz jednostajną zbieżność na ograniczonych podzbiorach Y. W tym celu wybierzmy ograniczony zbiór $D \subset Y$. Ponieważ przestrzeń jest właściwa, zbiór $C = \overline{D}$ jest zwarty. Zdefiniujmy zbiór K jak w dowodzie Twierdzenia 3.25

$$K = \{f_s(x) : 0 \leqslant s \leqslant t_0,\ x \in C\} = \bigcup_{0 \leqslant s \leqslant t_0} f_s(C).$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ zbiór K jest zwarty, zauważmy, że dla pewnych $y_1, \ldots, y_n \in K$

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\Big(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Istnieje takie n_0, że dla każdego $n \geqslant n_0$

$$\sup_{i=1,\ldots,n} d(f_{nt_0}(y_i), z_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wybierzmy $y \in K$, wtedy istnieje i, takie że $d(y, y_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Stąd, z nierówności trójkąta oraz z faktu, że odwzorowanie f_{nt_0} jest nieoddalające otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(f_{nt_0}(y), z_0) &\leqslant d(f_{nt_0}(y), f_{nt_0}(y_i)) + d(f_{nt_0}(y_i), z_0) \\ &\leqslant d(y, y_i) + d(f_{nt_0}(y_i), z_0) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ponieważ $y \in K$ został wybrany dowolnie mamy

$$\sup_{y \in K} d(f_{nt_0}(y), z_0) \to 0, \tag{3.13}$$

gdy $n \to \infty$. Zauważmy, że

$$f_t(x) = f_{nt_0+s}(x) = f_{nt_0}(f_s(x)) \in f_{nt_0}(K)$$

dla dowolnych $x \in C$ oraz $t > 0$, takich że $t = nt_0 + s$ i $n \in \mathbb{N}$, $s \in [0, t_0)$. Zatem

$$\sup_{x \in C} d(f_t(x), z_0) = \sup_{x \in C} d(f_{nt_0}(f_s(x)), z_0) \leqslant \sup_{y \in K} d(f_{nt_0}(y), z_0)$$

i korzystając z (3.13),

$$\sup_{x \in C} d(f_t(x), z_0) \to 0,$$

gdy $t \to \infty$, co kończy dowód. ■

3.2.3 Twierdzenie Wolffa-Denjoya dla obszarów ściśle wypukłych

W ostatniej części tego rozdziału zastosujemy ogólny wynik z poprzedniej sekcji, przedstawiając nasz odpowiednik twierdzenia typu Wolffa-Denjoya dla jednoparametrowych półgrup w przypadku przestrzeni geodezyjnych w $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową (rzeczywistą lub zespoloną) przestrzenią wektorową, a $D \subset V$ ograniczonym, otwartym podzbiorem.

Definicja 3.28
Punkt x_0 nazywamy *punktem stałym półgrupy* $S = \{f_t : D \to D\}_{t \geqslant 0}$, jeśli dla każdego $t \geqslant 0$,

$$f_t(x_0) = x_0.$$

Dodatkowo zdefiniujmy zbiory

$$\mathrm{Fix}(S) = \{x \in D : \ f_t(x) = x \text{ dla każdego } t \geqslant 0\}$$

oraz

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in D : \ f(x) = x\}.$$

Łącząc Wniosek 3.26 oraz Lemat 3.11 otrzymujemy następujący rezultat.

Twierdzenie 3.29 ([50])
Załóżmy, że D jest ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem w V oraz (D, d) jest zupełną przestrzenią geodezyjną spełniającą warunek (C), której topologia pokrywa się z topologią normy. Jeżeli $S = \{f_t : D \to D\}_{t \geqslant 0}$ jest jednoparametrową, ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających i istnieje takie $t_0 > 0$, że $\mathrm{Fix}(f_{t_0}) = \emptyset$, wtedy istnieje $\xi \in \partial D$, takie że półgrupa S zbiega jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

DOWÓD. Z Lematu 3.11 wynika, że przestrzeń metryczna (D, d) spełnia Aksjomat 3. Jeżeli półgrupa $S = \{f_t : D \to D\}_{t \geqslant 0}$ ma nieograniczone orbity, to teza twierdzenia wynika bezpośrednio z Wniosku 3.26. Załóżmy zatem, że orbita $\{f_t(y)\}_{t \geqslant 0}$ jest ograniczona dla pewnego (a stąd dla każdego) $y \in D$. Niech

$$r(\{f_t(y)\}) = \inf_{z \in D} \limsup_{t \to \infty} d(z, f_t(y))$$

oznacza promień asymptotyczny $\{f_t(y)\}_{t \geqslant 0}$, natomiast zbiór A postaci

$$A = \{x \in D : \limsup_{t \to \infty} d(x, f_t(y)) = r\}$$

niech będzie asymptotycznym centrum. Ponieważ przestrzeń (D, d) jest właściwa, podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 3.15 wnioskujemy, że asymptotyczne centrum ciągu $\{f_t(y)\}_{t \geqslant 0}$ jest niepustym, zwartym podzbiorem D. Ustalmy $s \geqslant 0$ dowolnie. Z założenia f_s jest przekształceniem nieoddalającym, zatem

$$\limsup_{t \to \infty} d(f_s(x), f_t(y)) \leqslant \limsup_{t \to \infty} d(x, f_{t-s}(y)) = \limsup_{t \to \infty} d(x, f_t(y))$$

co oznacza, że $f_s(A) \subset A$ dla każdego $s \geqslant 0$. Zatem w szczególności dla $s = t_0$, $f_{t_0}(A) \subset A$. Ponieważ zbiór D jest zwarty i (D, d) spełnia warunek (C), A jest wypukły. Na mocy twierdzenia Brouwera o punkcie stałym, odwzorowanie f_{t_0} ma punkt stały w A, co jest sprzeczne z założeniem i kończy dowód. ∎

Warto na koniec zaznaczyć, że powyższe twierdzenie można zastosować do szerokiej klasy przestrzeni metrycznych. Jak pokazaliśmy w pierwszym rozdziale, zarówno metryka Hilberta i odległość Kobayashiego spełniają warunek (C). Stąd w szczególności z Twierdzenia 3.29, wynikają następujące wnioski.

Wniosek 3.30 ([23])
Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem. Jeżeli $S = \{f_t : D \to D\}_{t \geqslant 0}$ jest jednoparametrową, ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających względem odległości Kobayashiego k_D oraz istnieje takie $t_0 > 0$, że $\mathrm{Fix}(f_{t_0}) = \emptyset$, to istnieje $\xi \in \partial D$, takie że półgrupa S zbiega jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

Pierwszy wniosek został udowodniony przez M. Budzyńską, T. Kuczumowa i S. Reicha (zob. Twierdzenie 7.2 [23]). Poniższe spostrzeżenie jest nowym wynikiem.

Wniosek 3.31 ([50])
Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem. Jeżeli $S = \{f_t : D \to D\}_{t \geqslant 0}$ jest jednoparametrową, ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających względem metryki Hilberta d_H oraz istnieje takie $t_0 > 0$, że $\mathrm{Fix}(f_{t_0}) = \emptyset$, to istnieje takie $\xi \in \partial D$, że półgrupa S zbiega jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

Rozdział 4

Twierdzenie Wolffa-Denjoya w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych

Przedmiotem tego rozdziału jest przedstawienie twierdzeń typu Wolffa-Denojya w kontekście przestrzeni nieskończenie wymiarowych. Rozpoczniemy od wprowadzenia przestrzeni (λ, κ)-quasi geodezyjnych i pojęcia odwzorowania zwartego oraz nieznacznie zmodyfikujemy używane dotychczas Aksjomaty. Następnie, podobnie jak w przypadku skończenie wymiarowym, podzielimy nasze wyniki na dwa podrozdziały i sformułujemy, wraz z dowodami, twierdzenia typu Wolffa-Denjoya w przypadku dyskretnym i ciągłym. Na koniec podamy jakie wnioski płyną z naszych wyników.

4.1 Przestrzenie (λ, κ)-quasi geodezyjne

W pierwszym podrozdziale rozpoczniemy od kilku podstawowych pojęć, niezbędnych w dalszej części rozdziału czwartego. W podrozdziale 1.1.3, podążając za A. Karlssonem, wprowadziliśmy pewne własności przestrzeni metrycznych zwane Aksjomatami, które wykorzystywaliśmy w rozdziale 3. Teraz, na potrzeby przypadku nieskończenie wymiarowego, przeformułujemy Aksjomat 1, 3 i 4 (Aksjomatu 2 nie będziemy potrzebować w naszych rozważaniach).

Aksjomat 1'. Przestrzeń metryczna (Y, d) jest otwartym, gęstym podzbiorem przestrzeni metrycznej $(\overline{Y}, \overline{d})$ oraz topologie tych przestrzeni pokrywają się na Y. Dla dowolnego $w \in Y$, jeżeli $\{x_n\}$ jest ciągiem w Y zbieżnym do $\xi \in \partial Y = \overline{Y} \setminus Y$, to

$$d(x_n, w) \to \infty.$$

Zauważmy, że w Aksjomacie $1'$ nie zakładamy zwartości przestrzeni $\overline{Y}$, oraz że Aksjomat $1'$ implikuje, że jeśli $A \subset Y$ jest ograniczony, to $\overline{d}$-domknięcie zbioru A nie ma punktu wspólnego z brzegiem przestrzeni ∂Y i stąd pokrywa się z d-domknięciem zbioru A.

Aksjomat 3'. Jeżeli $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ są ciągami w Y, $x_n \to \xi \in \partial Y$, $y_n \to \eta \in \partial Y$, oraz jeżeli dla pewnego $w \in Y$
$$d(x_n, y_n) - d(y_n, w) \to -\infty,$$
to $\xi = \eta$.

Aksjomat 4'. Jeżeli $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ są ciągami w Y, $x_n \to \xi \in \partial Y$, $y_n \to \eta \in \partial Y$, oraz jeżeli dla każdego n
$$d(x_n, y_n) \leqslant c$$
dla pewnej stałej c, wtedy $\xi = \eta$.

Uwaga 4.1
Aksjomaty 3 *i* $3'$ *oraz Aksjomaty* 4 *i* $4'$ *są równoważne w przypadku, gdy przestrzeń* $(\overline{Y}, \overline{d})$ *jest zwarta. Zauważmy, że jeśli ciąg nie jest zbieżny, to możemy wtedy wskazać dwa różne podciągi zbieżne do różnych granic. W przypadku ogólnym ciąg może nie mieć podciągu zbieżnego, dlatego w Aksjomatach* $3'$ *i* $4'$ *dodatkowo zakładamy zbieżność drugiego ciągu.*

Przykład 4.2
Przykładem przestrzeni spełniającej Aksjomat $1'$ jest ograniczony, wypukły obszar D przestrzeni Banacha wyposażony w metrykę Hilberta d_H (zob. Twierdzenie 4.13 [76]). Dodatkowo, jeśli k_D jest odległością Kobayashiego, to (D, k_D) jest zupełną przestrzenią metryczną spełniającą Aksjomat $1'$ (zob. [44],[65]), ale ogólnie nie jest to przestrzeń geodezyjna.

Wprowadzimy teraz definicję przestrzeni (λ, κ)-quasi geodezyjnych będących uogólnieniem przestrzeni geodezyjnych.

Niech (X, d_X), (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi.

Definicja 4.3 ([17], [77])
Odwzorowanie $f : X \to Y$ nazywamy *(λ, κ)-quasi izometrią*, jeżeli istnieją stałe $\lambda \geqslant 1$ oraz $\kappa \geqslant 0$, takie że
$$\frac{1}{\lambda} d_X(x, y) - \kappa \leqslant d_Y(f(x), f(y)) \leqslant \lambda d_X(x, y) + \kappa$$
dla dowolnych $x, y \in X$. W szczególności krzywą $\gamma : [a, b] \to Y$ będącą (λ, κ)-quasi izometrią nazywamy *(λ, κ)-quasi geodezyjną*, a jej obraz *odcinkiem (λ, κ)-quasi geodezyjnym*. Dodatkowo mówimy, że przestrzeń Y jest *(λ, κ)-quasi geodezyjna*, jeśli dla dowolnych dwóch punktów w tej przestrzeni istnieje (λ, κ)-quasi geodezyjna je łącząca.

Przykład 4.4
1. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}, d_E)$. Przykładem odwzorowania, które jest quasi izometrią jest funkcja $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

2. Korzystając z charakterystyki odległości Kobayashiego za pomocą funkcji Lemperta można pokazać, że wypukły ograniczony obszar przestrzeni Banacha z odległością Kobayashiego jest przestrzenią $(1, \kappa)$-quasi geodezyjną dla dowolnego $\kappa > 0$.

Przestrzenie (λ, κ)-quasi geodezyjne grają ważną rolę w przestrzeniach hiperbolicznych $\mathbb{H}^n$. W szczególności w przestrzeniach $\delta-$hiperbolicznych w geometrii globalnej, krzywe (λ, κ)-quasi geodezyjne są bliskie krzywym geodezyjnym (zdefiniowanym w podrozdziale 1.2). Więcej szczegółów można znaleźć w [17] (Rozdział III.H.). Ogólnie pojęcie (λ, κ)-quasi geodezyjnej jest szersze. W następnym przykładzie podamy krzywe c i γ, które są quasi geodezyjnymi, ale nie są geodezyjne.

Przykład 4.5 ([17], [24])

1. Rozważmy odwzorowanie $c : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ dane we współrzędnych biegunowych, jako
$$t \to (t, \log(1 + t)).$$
2. Rozważmy krzywą $\gamma : [1, 2] \to \mathbb{R}^2$ określoną wzorem
$$\gamma(t) = t(\cos(\ln t), \sin(\ln t)).$$

Na koniec tego podrozdziału wprowadźmy definicję odwzorowania zwartego w przestrzeni (Y, d) spełniającej Aksjomat 1'.

Definicja 4.6 (zob. [23])
Mówimy, że odwzorowanie $f : Y \to Y$ jest *zwarte*, jeżeli $\overline{f(Y)}^{\overline{d}}$, tzn. $\overline{d}$-domknięcie zbioru $f(Y)$ jest zwarte w $(\overline{Y}, \overline{d})$.

4.2 Przypadek dyskretny

Drugi podrozdział będzie dotyczył naszych wyników związanych z twierdzeniami typu Wolffa-Denjoya, w przypadku iteracji nieoddalających odwzorowań zwartych określonych w przestrzeniach (λ, κ)-quasi geodezyjnych. Dodatkowo podamy wraz z dowodem wariant tego twierdzenia dla ograniczonych i ściśle wypukłych obszarów w przestrzeniach Banacha.

4.2.1 Twierdzenie Wolffa-Denjoya w przestrzeniach (λ, κ)-quasi geodezyjnych

W tej części podamy odpowiednik Twierdzenia 3.3 w przypadku nieskończenie wymiarowym. Rozpoczniemy jednak od sformułowania, wraz z dowodem, odpowiednika Lematu 3.2. Dowód tego lematu podamy w całości, ponieważ jest bardziej delikatny.

Lemat 4.7 ([49])
Niech (Y, d) będzie $(1, \kappa)$-quasi geodezyjną przestrzenią metryczną spełniającą Aksjomat $1'$. Załóżmy, że $f : Y \to Y$ jest odwzorowaniem zwartym bez ograniczonych orbit. Wtedy istnieje takie $\xi \in \partial Y$, że dla dowolnych $z_0 \in Y$, $r \in \mathbb{R}$ i ciągu liczb naturalnych $\{a_n\}$, istnieją $z \in Y$ oraz podciąg $\{a_{n_k}\}$ ciągu $\{a_n\}$, takie że
$$f^{a_{n_k}}(z) \in F_{z_0}(\xi, r)$$
dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Dodatkowo, jeżeli (Y, d) spełnia Aksjomat $4'$, to
$$\xi \in \bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{\overline{d}}.$$

Dowód. Ustalmy $y \in Y$. Ponieważ odwzorowanie $f : Y \to Y$ jest zwarte, to $\overline{d}$-domknięcie $\overline{O(y)}^{\overline{d}}$ orbity $\{f^n(y) : n \geqslant 1\}$ jest zbiorem zwartym w $\overline{Y}$. Następnie rozważmy d-domknięty i ograniczony zbiór $B \subset Y$. Zauważmy, że na mocy Aksjomatu $1'$ zbiór B jest $\overline{d}$-domknięty. Zatem zbiór

$$\overline{O(y)}^{\overline{d}} \cap B = \overline{O(y)}^{d} \cap B$$

jest zwarty w $\overline{Y}$, a stąd zwarty w Y. Czyli $(\overline{O(y)}^{d}, d)$ jest właściwa i na mocy twierdzenia Całki oraz nieoddalania odwzorowania f wnioskujemy, że

$$d_n = d(f^n(y), y) \to \infty,$$

gdy $n \to \infty$. Podobnie jak w Lemacie 3.2, istnieje ciąg liczb naturalnych $\{\varphi(i)\}$, taki że

$$d_m < d_{\varphi(i)} \text{ dla } m < \varphi(i),\ i = 1, 2, \ldots.$$

Ponieważ f jest odwzorowaniem zwartym, bez straty ogólności możemy założyć, że ciąg $\{f^{\varphi(i)}(y)\}$ dąży do pewnego punktu $\xi \in \partial Y$. Ustalmy $r > 0$ oraz ciąg liczb naturalnych $\{a_n\}$. Na każdym odcinku $(1, \kappa)$-quasi geodezyjnym

$$[y, f^{\varphi(i)-a_1-1}(y)] \subset Y$$

(zakładając, że $\varphi(i) > a_1 + 1$ oraz $d(f^{\varphi(i)-a_1-1}(y), y) > r$) łączącym punkty y oraz $f^{\varphi(i)-a_1-1}(y)$, wybieramy taki punkt $z^1_{\varphi(i)}$, że $d(z^1_{\varphi(i)}, y) = r$. Ponieważ Y jest $(1, \kappa)$-quasi geodezyjna, otrzymujemy

$$d(f^{\varphi(i)-a_1-1}(y), z^1_{\varphi(i)}) + d(z^1_{\varphi(i)}, y) \leqslant d(f^{\varphi(i)-a_1-1}(y), y) + 3\kappa \tag{4.1}$$

dla każdego i. Z założenia $\overline{f(Y)}^{\overline{d}}$ jest zbiorem zwartym w $(\overline{Y}, \overline{d})$ i stąd istnieje podciąg $\{\varphi_1(i)\}$ ciągu $\{\varphi(i)\}$, taki że ciąg $\{f(z^1_{\varphi_1(i)})\}$ zbiega do pewnego $z_1 \in \overline{f(Y)}^{\overline{d}}$. Stąd, z faktu że odwzorowanie f jest nieoddalające oraz z (4.1) mamy

$$\begin{aligned}
& \limsup_{i\to\infty} d(z_1, f^{\varphi_1(i)-a_1}(y)) - d(f^{\varphi_1(i)-a_1-1}(y), y) \\
= \ & \limsup_{i\to\infty} d(f(z^1_{\varphi_1(i)}), f^{\varphi_1(i)-a_1}(y)) - d(f^{\varphi_1(i)-a_1-1}(y), y) \\
\leqslant \ & \limsup_{i\to\infty} d(z^1_{\varphi_1(i)}, f^{\varphi_1(i)-a_1-1}(y)) - d(f^{\varphi_1(i)-a_1-1}(y), y) \\
\leqslant \ & \limsup_{i\to\infty} -d(z^1_{\varphi(i)}, y) + 3\kappa = -r + 3\kappa.
\end{aligned}$$

Postępując indukcyjnie dla każdego $n > 1$, rozważmy punkty y i $f^{\varphi_{n-1}(i)-a_n-1}(y)$ oraz odcinek $(1, \kappa)$-quasi geodezyjny, który je łączy

$$[y, f^{\varphi_{n-1}(i)-a_n-1}(y)] \subset Y$$

(zakładając, że $\varphi_{n-1}(i) > a_n - 1$ oraz $d(f^{\varphi_{n-1}(i)-a_n-1}(y), y) > r$). Wybierzmy na tym odcinku taki punkt $z^n_{\varphi_{n-1}(i)}$, że $d(z^n_{\varphi_{n-1}(i)}, y) = r$ oraz weźmy podciąg $\{\varphi_n(i)\}$ ciągu $\{\varphi_{n-1}(i)\}$, taki że ciąg $\{f(z^n_{\varphi_n(i)})\}$ zbiega do pewnego $z_n \in \overline{f(Y)}^{\overline{d}}$. Stąd

$$\limsup_{i\to\infty} d(z_n, f^{\varphi_n(i)-a_n}(y)) - d(f^{\varphi_n(i)-a_n-1}(y), y) \leqslant -r + 3\kappa,$$

i ponieważ ciąg $\{z_n\}$ jest zawarty w zbiorze zwartym $\overline{f(Y)}^d \cap \bar{B}(y,r) \subset Y$, istnieje podciąg $\{z_{n_k}\}$ ciągu $\{z_n\}$ zbieżny do pewnego $z \in Y$ i taki, że $d(z_{n_k}, y) < \frac{1}{2}$ dla każdego k. Stosując metodę przekątniową otrzymujemy, że istnieje podciąg $\{\psi(i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ każdego podciągu $\{\varphi_n(i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, taki że

$$d(z, f^{\psi(i)-a_{n_k}}(y)) - d(f^{\psi(i)-a_{n_k}-1}(y), y) < -r + 1 + 3\kappa$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i $i \geqslant k$. Stąd oraz z nieoddalania przekształcenia f, otrzymujemy dla każdego a_{n_k},

$$\begin{aligned}
\liminf_{w\to\xi} d(f^{a_{n_k}}(z), w) - d(w, y) &\leqslant \limsup_{i\to\infty} d(f^{a_{n_k}}(z), f^{\psi(i)}(y)) - d(f^{\psi(i)}(y), y) \\
&\leqslant \limsup_{i\to\infty} d(z, f^{\psi(i)-a_{n_k}}(y)) - d(f^{\psi(i)}(y), y) \\
&\leqslant \limsup_{i\to\infty} d(z, f^{\psi(i)-a_{n_k}}(y)) - d(f^{\psi(i)-a_{n_k}-1}(y), y) \\
&\leqslant -r + 1 + 3\kappa.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\liminf_{w\to\xi} d(f^{a_{n_k}}(z), w) - d(w, z_0) \leqslant -r + 1 + 3\kappa + d(z_0, y)$$

dla każdego $z_0 \in Y$. Ponieważ $r > 0$ był ustalony dowolnie, to pokazuje, że $f^{a_{n_k}}(z) \in F_{z_0}(\xi, r)$ i kończy pierwszą część dowodu. Druga część dowodu przebiega analogicznie jak w dowodzie lematu 3.2. Zatem ostatecznie otrzymujemy

$$\xi \in \bigcap_{r\in\mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^d.$$

■

Zauważmy, że z konstrukcji w dowodzie Lematu 1.44, ciąg $\{w^n_{k_n}\}$ w nim występujący jest zbieżny, więc w przypadku nieskończenie wymiarowym odpowiednik Lematu 1.44 dla Aksjomatu $3'$ jest prawdziwy, a dowód identyczny.

Lemat 4.8
Jeżeli przestrzeń metryczna (Y, d) spełnia Aksjomat $3'$, $z_0 \in Y$, $\zeta \in \partial Y$ oraz $r \in \mathbb{R}$, to

$$\bigcap_{r\in\mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\zeta, r)}^d = \{\zeta\}.$$

Stosując dwa powyższe lematy udowodnimy teraz kolejne twierdzenie, które jest głównym wynikiem tego podrozdziału.

Twierdzenie 4.9 ([49])
Niech (Y, d) będzie przestrzenią $(1, \kappa)$-quasi geodezyjną spełniającą Aksjomat $1'$ i Aksjomat $3'$. Jeżeli $f : Y \to Y$ jest zwartym odwzorowaniem nieoddalającym bez ograniczonych orbit, to istnieje takie $\xi \in \partial Y$, że iteracje f^n przekształcenia f zbiegają jednostajnie na ograniczonych podzbiorach Y do ξ.

DOWÓD. Zauważmy, że spełnione są założenia Lematu 4.7, stąd istnieje $\xi \in \partial Y$, które spełnia jego tezę. Na mocy Lematu 4.8 mamy

$$\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{\overline{d}} = \{\xi\}.$$

Ustalmy $y \in Y$. Podobnie jak w Lemacie 4.7 wnioskujemy, że

$$d(f^n(y), y) \to \infty,$$

gdy $n \to \infty$. Wybierzmy dowolny podciąg $\{f^{a_n}(y)\}$ ciągu iteracji $\{f^n(y)\}$ przekształcenia f, który jest zbieżny do pewnej $\eta \in \partial Y$. Udowodnimy, że

$$\eta = \xi.$$

(To wystarczy, ponieważ korzystamy z założenia, że odwzorowanie f jest zwarte w $\overline{Y}$. Każdy podciąg postaci $\{f^{a_n}(y)\}$ zawiera się w zbiorze zwartym, czyli ma podciąg zbieżny do elementu leżącego na brzegu ∂Y, gdyż $d(f^n(y), y) \to \infty$, gdy $n \to \infty$). Ustalmy $r \in \mathbb{R}$. Z Lematu 4.7 wynika, że istnieją podciąg $\{a_{n_k}\}$ ciągu $\{a_n\}$ oraz $z \in Y$, takie że

$$f^{a_{n_k}}(z) \in F_{z_0}(\xi, r) \quad \text{dla} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że ciąg $\{f^{a_{n_k}}(z)\}$ jest zbieżny do elementu z brzegu ∂Y (w razie potrzeby przechodząc do podciągu). Z faktu, że odwzorowanie f jest nieoddalające otrzymujemy

$$d(f^{a_{n_k}}(y), f^{a_{n_k}}(z)) \leqslant d(y, z).$$

Ponieważ przestrzeń (Y, d) spełnia Aksjomat $1'$ oraz Aksjomat $3'$, spełnia również Aksjomat $4'$. Zatem

$$f^{a_{n_k}}(z) \to \eta,$$

gdy $k \to \infty$. Stąd oraz z (4.2) otrzymujemy, że

$$\eta \in \bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{\overline{d}} = \{\xi\}.$$

Zatem $\eta = \xi$ i $f^n(y) \to \xi$, gdy $n \to \infty$ dla dowolnego $y \in Y$.

Dowód zbieżności na ograniczonych podzbiorach przebiega podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 3.3. Załóżmy nie wprost, że istnieje $\overline{d}$-otwarte otoczenie $U \subset \overline{Y}$ punktu ξ, ograniczony zbiór $K \subset Y$ oraz ciąg $\{y_n\} \subset K$ taki, że $f^n(y_n) \notin U$ dla każdego $n \in N$. Wtedy

$$d(f^n(y_n), f^n(y)) \leqslant d(y_n, y) \leqslant \mathrm{diam} K \tag{4.3}$$

dla dowolnego $y \in K$. Ponadto $\{f^n(y_n)\}$ ma podciąg zbieżny w metryce $\overline{d}$ do pewnej $\eta \in \overline{Y} \setminus U$. Ponieważ $f^n(y) \to \xi$ oraz zachodzi (4.3), to $\eta \in \partial Y$. Ale wtedy z Aksjomatu $4'$ wnioskujemy, że $\xi = \eta \in \overline{Y} \setminus U$, co stanowi sprzeczność. ∎

Analogicznie jak wcześniej możemy sformułować wariant powyższego twierdzenia przy założeniu Aksjomatu $4'$ i jednopunktowego przecięcia domknięć dużych horokul. Wykorzystamy ten wynik w przypadku ciągłym.

Twierdzenie 4.10 ([49])
Niech (Y, d) będzie przestrzenią $(1, \kappa)$-quasi geodezyjną spełniającą Aksjomat $1'$ i Aksjomat $4'$ oraz załóżmy, że dla każdego $\zeta \in \partial Y$ i $z_0 \in Y$ iloczyn domknięć dużych horokul $\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\zeta, r)}^d$ jest zbiorem jednopunktowym. Jeżeli $f : Y \to Y$ jest zwartym odwzorowaniam nieoddalającym bez ograniczonych orbit, to istnieje takie $\xi \in \partial Y$, że iteracje f^n przekształcenia f zbiegają jednostajnie na ograniczonych podzbiorach Y do ξ.

4.2.2 Twierdzenie Wolffa-Denjoya dla obszarów ściśle wypukłych

W kolejnej części tego rozdziału przedstawimy odpowiednik twierdzenia Wolffa-Denjoya dla zwartych odwzorowań nieoddalających, nie mających punktów stałych, określonych na ściśle wypukłych obszarach w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach (λ, κ)-quasi geodezyjnych. Zauważmy, że Stwierdzenie 3.10 jest również prawdziwe przy założeniu, że D jest ograniczonym i wypukłym obszarem w przestrzeni Banacha. Stąd analogicznie możemy sformułować odpowiednik Lematu 3.11.

Lemat 4.11
Załóżmy, że D jest ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem w przestrzeni Banacha V oraz (D, d) jest przestrzenią metryczną spełniającą warunek (C), której topologia pokrywa się z topologią normy. Wtedy (D, d) spełnia Aksjomat $3'$.

Twierdzenie 4.9 w połączeniu z Lematem 4.11 pozwala sformułować uogólnienie Twierdzenia 3.15, tj. głównego wyniku dla obszarów ściśle wypukłych z rozdziału trzeciego.

Twierdzenie 4.12 ([49])
Załóżmy, że D jest ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem w przestrzeni Banacha oraz (D, d) jest przestrzenią $(1, \kappa)$-quasi geodezyjną spełniającą Aksjomat $1'$ (w odniesieniu do domknięcia w normie $(\overline{D}, \|\cdot\|)$) i warunek (C). Jeżeli $f : D \to D$ jest zwartym odwzorowaniem nieoddalającym nie mającym punktów stałych, to istnieje takie $\xi \in \partial D$, że iteracje f^n przekształcenia f zbiegają jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

Dowód. Na początek rozważmy przypadek, w którym orbita $\{f^n(y)\}$ jest ograniczona dla pewnego (a stąd dla każdego) $y \in D$. Niech

$$r(\{f^n(y)\}) = \inf_{z \in D} \limsup_{n \to \infty} d(z, f^n(y))$$

oznacza asymptotyczny promień ciągu $\{f^n(y)\}$ oraz niech

$$A = \{x \in D : \limsup_{n \to \infty} d(x, f^n(y)) = r(\{f^n(y)\})\}$$

oznacza asymptotyczne centrum. Dodatkowo rozważmy zbiory A_ε postaci

$$A_\varepsilon = \{x \in D : \limsup_{n \to \infty} d(x, f^n(y)) \leqslant r(\{f^n(y)\}) + \varepsilon\}.$$

Ponieważ odwzorowanie f jest nieoddalające, otrzymujemy że dla dowolnego $x \in A_\varepsilon$

$$\limsup_{n\to\infty} d(f(x), f^n(y)) \leqslant \limsup_{n\to\infty} d(x, f^{n-1}(y)) = \limsup_{n\to\infty} d(x, f^n(y)),$$

co pokazuje, że $f(A_\varepsilon) \subset A_\varepsilon$. Dodatkowo zauważmy, że dowód Uwagi 3.14 można powtórzyć z wykorzystaniem Aksjomatu $1'$, zatem podobnie wnioskujemy, że zbiór A_ε jest ograniczony i domknięty względem d i względem normy. Ponieważ odwzorowanie f jest zwarte, otrzymujemy

$$\emptyset \neq \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{f(A_\varepsilon)}^{||\cdot||} \subset \bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon = A.$$

Co więcej, zauważmy że

$$f(A) = f(\bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} f(A_\varepsilon) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon = A,$$

co oznacza że $f(A) \subset A$. Zbiór A jest też ograniczony i domknięty w $||\cdot||$ oraz $\overline{f(A)}^{||\cdot||}$ jest zwarty. Ponieważ z założenia D jest wypukły i przestrzeń (D, d) spełnia warunek (C), zatem zbiór A również jest wypukły. Zatem na mocy twierdzenia Schaudera o punkcie stałym odwzorowanie f ma punkt stały, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem $f : D \to D$ ma nieograniczone orbity i teza twierdzenia wynika natychmiast z Twierdzenia 4.9. ■

Jak zostało powiedziane wcześniej, dowolny ograniczony i wypukły obszar D w przestrzeni Banacha może zostać wyposażony w metrykę Hilberta d_H i stać się zupełną przestrzenią geodezyjną, spełniającą Aksjomat $1'$ i warunek (C) (co pokazaliśmy w Lemacie 1.17). Zatem następujący wniosek, będący szczególnym przypadkiem Twierdzenia 4.17 z [76], jest natychmiastową konsekwencją Twierdzenia 4.12.

Wniosek 4.13 ([76])
Niech D będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem w przestrzeni Banacha. Jeżeli $f : (D, d_H) \to (D, d_H)$ jest zwartym odwzorowaniem nieoddalającym nie mającym punktów stałych, to istnieje takie $\xi \in \partial D$, że iteracje f^n przekształcenia f zbiegają jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

Przypadek metryki Kobayashiego k_D jest bardziej delikatny. Dobrze znany jest fakt, że jeśli D jest ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha, to (D, k_D) jest zupełną przestrzenią metryczną spełniającą Aksjomat $1'$ (zob. [44], [65]). Jednakże, w ogólności nie jest to przestrzeń geodezyjna, ale korzystając z definicji odległości Kobayashiego wprowadzonej przy pomocy charakteryzacji Lemperta (opisanej w rozdziale pierwszym) można pokazać, że (D, k_D) jest przestrzenią $(1, \varepsilon)$-quasi geodezyjną dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Dzięki temu możemy sformułować kolejny wniosek z Twierdzenia 4.12.

Wniosek 4.14
Niech D będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha. Jeżeli $f : (D, k_D) \to (D, k_D)$ jest zwartym odwzorowaniem nieoddalającym nie mającym punktów stałych, to istnieje takie $\xi \in \partial D$, że iteracje f^n przekształcenia f zbiegają jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

Zwarte odwzorowania holomorficzne nie mające punktów stałych, określone na otwartej kuli jednostkowej w przestrzeni Hilberta były rozważane przez C. H. Chu i P. Mellon w [29]. Powyższy wynik został udowodniony przez J. Kapelusznego, T. Kuczumowa i S. Reicha w postaci Twierdzenia 4.4 w pracy [54], w przypadku otwartej kuli jednostkowej w przestrzeni jednostajnie wypukłej, jako Twierdzenie 4.2 w pracy M. Budzyńskiej, T. Kuczumowa i S. Reicha [21], w przypadku ograniczonych ściśle wypukłych obszarów przestrzeni refleksywnych, czy wreszcie, przez tych samych autorów, jako Twierdzenie 4.1 w [22].

4.3 Przypadek ciągły

W tym podrozdziale przedstawimy twierdzenia typu Wolffa-Denjoya w przypadku półgrup odwzorowań nieoddalających w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach $(1,\kappa)$-quasi geodezyjnych. Udowodnimy, że jeśli w jednoparametrowej ciągłej półgrupie odwzorowań nieoddalających istnieje odwzorowanie zwarte, to twierdzenie typu Wolffa-Denjoya jest prawdziwe. Następnie pokażemy wariant tego twierdzenia dla ograniczonych i ściśle wypukłych obszarów w przestrzeniach Banacha, aby wreszcie sformułować wnioski dla pewnych szczególnych przestrzeni.

4.3.1 Twierdzenie Wolffa-Denjoya w przestrzeniach (λ,κ)-quasi geodezyjnych

W tym podrozdziale podamy odpowiedniki twierdzeń z podrozdziału 3.2.2 w przypadku przestrzeni (λ,κ)-quasi geodyzjnych. Rozpoczniemy od sformułowania, wraz z dowodem, głównego wyniku w tej części pracy, tzn. twierdzenia typu Wolffa-Denjoya dla jednoparametrowych półgrup odwzorowań nieoddalajcych z wykorzystaniem pojęcia odwzorowania zwartego.

Twierdzenie 4.15 ([52])
Niech (Y,d) będzie przestrzenią $(1,\kappa)$-quasi geodezyjną, spełniającą Aksjomat $1'$ i Aksjomat $4'$ oraz załóżmy, że dla każdego $\zeta \in \partial Y$ i $z_0 \in Y$, iloczyn domknięć dużych horokul $\bigcap_{r\in\mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\zeta,r)}^d$ jest zbiorem jednopunktowym. Załóżmy, że $S = \{f_t : Y \to Y\}_{t\geqslant 0}$ jest jednoparametrową, ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających na Y bez ograniczonych orbit oraz istnieje takie $t_0 > 0$, że przekształcenie $f_{t_0} : Y \to Y$ jest zwarte. Wtedy istnieje takie $\xi \in \partial Y$, że półgrupa S zbiega jednostajnie na ograniczonych podzbiorach Y do ξ.

Dowód. Ustalmy $t_0 > 0$. Wybierzmy ograniczony zbiór $D \subset Y$ i zdefiniujmy zbiór K, tak jak w dowodzie Twierdzenia 3.25:

$$K = \{f_s(x) : 0 \leqslant s \leqslant t_0,\ x \in D\} = \bigcup_{0\leqslant s\leqslant t_0} f_s(D) \subset Y.$$

Pokażemy, że zbiór K jest ograniczony. Ponieważ zbiór D jest ograniczony, istnieją $x_0 \in Y$ i $r > 0$, takie że $D \subset B(x_0, r)$. Korzystając z faktu, że odwzorowanie f_s jest nieoddalające, otrzymujemy

$$d(f_s(x), f_s(x_0)) \leqslant d(x, x_0) \leqslant r.$$

Stąd

$$f_s(D) \subset B(f_s(x_0), r)$$

dla każdego $s > 0$. Z ograniczoności zbioru D,

$$K = \bigcup_{0 \leqslant s \leqslant t_0} f_s(D) \subset \bigcup_{0 \leqslant s \leqslant t_0} B(f_s(x_0), r).$$

Wystarczy pokazać, że zbiór środków kul

$$\{f_s(x_0) : \, 0 \leqslant s \leqslant t_0\}$$

jest ograniczony. W szczególności, na mocy Lematu 3.21 (przyjmując jako zbiór zwarty C zbiór jednopunktowy) mamy, że zbiór ten jest zwarty, a stąd ograniczony. Zatem istnieją takie $y_0 \in Y$ i $r_1 > 0$, że

$$\{f_s(x_0) : \, 0 \leqslant s \leqslant t_0\} \subset B(y_0, r_1).$$

Czyli

$$K = \bigcup_{0 \leqslant s \leqslant t_0} B(f_s(x_0), r) \subset B(y_0, r + r_1),$$

co pokazuje ograniczoność zbioru K. Ustalmy $y \in Y$. Zauważmy, że z definicji półgrupy wynika, że

$$f_{nt_0}(y) = f_{t_0}^n(y), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ z założenia odwzorowanie $f_{t_0} : Y \to Y$ jest zwarte, to $\overline{d}$-domknięcie $\overline{O(y)}^{\overline{d}}$ orbity $\{f_{t_0}(y) : t_0 \geqslant 0\}$ jest zbiorem zwartym w $\overline{Y}$. Następnie rozważmy d-domknięty i ograniczony zbiór $B \subset Y$. Zauważmy, że na mocy Aksjomatu 1′ zbiór B jest $\overline{d}$-domknięty. Zatem zbiór

$$\overline{O(y)}^{\overline{d}} \cap B = \overline{O(y)}^{d} \cap B$$

jest zwarty w $\overline{Y}$, a stąd zwarty w Y. Czyli $(\overline{O(y)}^{d}, d)$ jest właściwa i na mocy twierdzenia Całki oraz nieoddalania odwzorowania f_{t_0} wnioskujemy, że

$$d(f_{t_0}(y), y) \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Zatem na mocy Twierdzenia 4.10,

$$\sup_{y \in K} \overline{d}(f_{nt_0}(y), \xi) \to 0, \tag{4.4}$$

gdy $n \to \infty$. Natępnie zauważmy, że dla dowolnych $x \in D$, $t > 0$, takich że $t = nt_0 + s$ oraz $n \in \mathbb{N}$, $s \in [0, t_0)$, zachodzi

$$f_t(x) = f_{nt_0+s}(x) = f_{nt_0}(f_s(x)) \in f_{nt_0}(K).$$

Zatem

$$\sup_{x \in D} \overline{d}(f_t(x), \xi) = \sup_{x \in D} \overline{d}(f_{nt_0}(f_s(x)), \xi) \leqslant \sup_{y \in K} \overline{d}(f_{nt_0}(y), \xi)$$

i korzystając z (4.4) otrzymujemy, że

$$\sup_{x \in D} \overline{d}(f_t(x), \xi) \to 0,$$

gdy $t \to \infty$, co kończy dowód. ■

Ponownie, wykorzystując Lemat 4.8, możemy w powyższym twierdzeniu założenie o jednopunktowym przecięciu domknięć dużych horokul zastąpić Aksjomatem $3'$. Wtedy Twierdzenie 4.15 natychmiastowo implikuje poniższy wniosek.

Wniosek 4.16 ([52])
Niech (Y, d) będzie przestrzenią $(1, \kappa)$-quasi geodezyjną spełniającą Aksjomat $3'$. Załóżmy, że $S = \{f_t : Y \to Y\}_{t \geqslant 0}$ jest jednoparametrową ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających na Y bez ograniczonych orbit oraz istnieje takie $t_0 > 0$, że przekształcenie $f_{t_0} : Y \to Y$ jest zwarte. Wtedy istnieje takie $\xi \in \partial Y$, że półgrupa S zbiega jednostajnie na ograniczonych podzbiorach Y do ξ.

Dodatkowo zauważmy, że jeżeli w półgrupie $S = \{f_t : Y \to Y\}_{t \geqslant 0}$ jedno z odwzorowań $f_{t_0} : Y \to Y$ jest przekształceniem kontrakcyjnym i zwartym, to otrzymamy nieco inny wynik bez założenia nieograniczoności orbit.

Twierdzenie 4.17 ([52])
Niech (Y, d) będzie przestrzenią $(1, \kappa)$-quasi geodezyjną spełniającą Aksjomat $1'$ i Aksjomat $4'$ oraz załóżmy, że dla każdego $\zeta \in \partial Y$ i $z_0 \in Y$ iloczyn domknięć dużych horokul $\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\zeta, r)}$ jest zbiorem jednopunktowym. Jeżeli $S = \{f_t : Y \to Y\}_{t \geqslant 0}$ jest jednoparametrową ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających na Y i istnieje takie $t_0 > 0$, że $f_{t_0} : Y \to Y$ jest odwzorowaniem kontrakcyjnym i zwartym, wtedy istnieje $\xi \in \overline{Y}$ takie, że półgrupa S zbiega jednostajnie na zwartych podzbiorach Y do ξ.

Dowód.
Na początku załóżmy, że półgrupa $S = \{f_t : Y \to Y\}_{t \geqslant 0}$ ma nieograniczone orbity. Wtedy teza twierdzenia wynika bezpośrednio z Twierdzenia 4.15. Załóżmy zatem, że orbita $\{f_t(y)\}_{t \geqslant 0}$ jest ograniczona dla każdego $y \in Y$. Z założenia istnieje takie $t_0 > 0$, że $f_{t_0} : Y \to Y$ jest odwzorowaniem zwartym i kontrakcyjnym. Ustalmy $y_0 \in Y$. Z definicji półgrupy

$$f_{nt_0}(y_0) = f_{t_0}^n(y_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ odwzorowanie f_{t_0} jest zwarte, to zbiór $\overline{f_{t_0}(Y)}^d$ jest zwarty w $\overline{Y}$. Stąd zbiór $\overline{\{f_{nt_0}(y_0) : n \in \mathbb{N}\}}^d$ jest zwarty w $\overline{Y}$ jako domknięty podzbiór zbioru zwartego. Ale ciąg $\{f_{nt_0}(y_0)\}$ jest ograniczony, zatem z Aksjomatu $1'$ wynika, że istnieje jego podciąg $\{f_{n_k t_0}(y_0)\}$ zbieżny do pewnego $z_0 \in Y$. Zdefiniujmy ciąg odległości $\{d_n\}$ następująco

$$d_n = d(f_{nt_0}(y_0), f_{nt_0+t_0}(y_0)), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Ponieważ przekształcenie f_{t_0} jest nieoddalające, ciąg $\{d_n\}$ jest nierosnący i stąd zbieżny do pewnej η, gdy $n \to \infty$. Wybierzmy dwa podciągi $\{d_{n_k}\}$ i $\{d_{n_k+1}\}$ ciągu $\{d_n\}$. Wtedy

$$\eta \leftarrow d_{n_k} = d(f_{n_k t_0}(y_0), f_{n_k t_0 + t_0}(y_0)) \to d(z_0, f_{t_0}(z_0))$$

oraz

$$\eta \leftarrow d_{n_k+1} = d(f_{n_k t_0 + t_0}(y_0), f_{n_k t_0 + t_0 + t_0}(y_0)) \to d(f_{t_0}(z_0), f_{2t_0}(z_0)).$$

Zatem

$$\eta = d(z_0, f_{t_0}(z_0)) = d(f_{t_0}(z_0), f_{2t_0}(z_0)). \tag{4.5}$$

Ponieważ f_{t_0} jest odwzorowaniem kontrakcyjnym, jeżeli z_0 i $f_{t_0}(z_0)$ są różnymi punktami otrzymujemy

$$d(f_{t_0}(z_0), f_{2t_0}(z_0)) < d(z_0, f_{t_0}(z_0)),$$

co stanowi sprzeczność z (4.5). Zatem

$$f_{t_0}(z_0) = z_0.$$

Co więcej, ponieważ ciąg odległości $\{d(f_{nt_0}(y_0), z_0)\}$ jest malejący, otrzymujemy

$$f_{nt_0}(y_0) \to z_0 \in Y,$$

gdy $n \to \infty$. Zauważmy teraz, że jeśli wybierzemy dowolnie $y \in Y$, to wcześniejszy argument implikuje, że $f_{nt_0}(y)$ zbiega do punktu stałego odwzorowania f_{t_0} dla każdego $y \in Y$. Jednakże, odwzorowania kontrakcyjne mogą mieć co najwyżej jeden punkt stały. Zatem

$$f_{nt_0}(y) \to z_0,$$

gdy $n \to \infty$, dla dowolnego $y \in Y$.

Dowód zbieżności jednostajnej na zwartych podzbiorach przestrzeni Y przebiega identycznie jak w dowodzie Twierdzenia 3.27.

■

Na mocy Lematu 4.8 natychmiastowo otrzymujemy poniższy wniosek.

Wniosek 4.18 ([52])
Niech (Y, d) będzie przestrzenią $(1, \kappa)$-quasi geodezyjną spełniającą Aksjomat $1'$ i Aksjomat $3'$. Jeżeli $S = \{f_t : Y \to Y\}_{t \geqslant 0}$ jest jednoparametrową ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających na Y i istnieje takie $t_0 > 0$, że $f_{t_0} : Y \to Y$ jest odwzorowaniem kontrakcyjnym i zwartym, wtedy istnieje $\xi \in \overline{Y}$ takie, że półgrupa S zbiega jednostajnie na zwartych podzbiorach Y do ξ.

4.3.2 Twierdzenie Wolffa-Denjoya dla obszarów ściśle wypukłych

Ponownie wykorzystując narzędzie, jakim jest asymptotyczne centrum, udowodnimy odpowiednik twierdzenia typu Wolffa-Denjoya dla jednoparametrowych ciągłych półgrup odwzorowań nieoddalających, określonych na ściśle wypukłych obszarach w przestrzeniach Banacha. Następnie sformułujemy wnioski z tego twierdzenia dla przestrzeni z metryką Hilberta oraz odległością Kobayashiego.

Twierdzenie 4.19 ([52])
Załóżmy, że D jest ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem w przestrzeni Banacha oraz (D, d) jest przestrzenią $(1, \kappa)$-quasi geodezyjną spełniającą Aksjomat $1'$ (w stosunku do domknięcia w normie $(\overline{D}, \|\cdot\|)$) oraz warunek (C). Jeżeli $S = \{f_t : D \to D\}_{t \geqslant 0}$ jest jednoparametrową ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających i istnieje takie $t_0 > 0$, że $\mathrm{Fix}(f_{t_0}) = \emptyset$ oraz przekształcenie f_{t_0} jest zwarte, wtedy istnieje takie $\xi \in \partial D$, że półgrupa S zbiega jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

Dowód. W pierwszym przypadku załóżmy, że $f_t : D \to D$, $t \geqslant 0$ ma nieograniczone orbity. Wtedy teza twierdzenia wynika w sposób oczywisty z Twierdzenia 4.15. Załóżmy zatem, że orbita $\{f_t(y)\}_{t \geqslant 0}$ przekształcenia f_t dla $t \geqslant 0$ jest ograniczona dla pewnego (a stąd dla każdego) $y \in D$. Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 4.12 wprowadźmy asymptotyczne centrum

$$A = \{x \in D : \limsup_{t \to \infty} d(x, f_t(y)) = r(\{f_t(y)\})\}$$

oraz asymptotyczne centrum z $\varepsilon > 0$

$$A_\varepsilon = \{x \in D : \limsup_{t \to \infty} d(x, f_t(y)) \leqslant r(\{f_t(y)\}) + \varepsilon\}.$$

Ustalmy dowolnie $s \geqslant 0$. Ponieważ odwzorowanie f_s jest nieoddalające, mamy

$$\limsup_{t \to \infty} d(f_s(x), f_t(y)) \leqslant \limsup_{t \to \infty} d(x, f_{t-s}(y)) = \limsup_{t \to \infty} d(x, f_t(y)),$$

co pokazuje niezmienniczość A_ε względem odwzorowania f_s, tzn. $f_s(A_\varepsilon) \subset A_\varepsilon$ dla dowolnego $s \geqslant 0$, czyli w szczególności dla $s = t_0$ mamy

$$f_{t_0}(A_\varepsilon) \subset A_\varepsilon. \tag{4.6}$$

Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 4.12 pokazujemy, że A_ε jest domknięty i ograniczony względem d i względem normy. Z założenia odwzorowanie f_{t_0} jest zwarte, stąd

$$\emptyset \neq \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{f_{t_0}(A_\varepsilon)}^{||\cdot||} \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon = A.$$

Co więcej, korzystając z (4.6), zauważmy że

$$f_{t_0}(A) = f_{t_0}(\bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon) \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} f_{t_0}(A_\varepsilon) \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon = A,$$

co oznacza, że $f_{t_0}(A) \subset A$. Zbiór A jest też ograniczony i domknięty w $|| \cdot ||$ oraz $\overline{f_{t_0}(A)}^{||\cdot||}$ jest zwarty. Ponieważ z założenia D jest wypukły i przestrzeń (D, d) spełnia warunek (C), zatem zbiór A również jest wypukły. Zatem na mocy twierdzenia Schaudera o punkcie stałym odwzorowanie f_{t_0} ma punkt stały, co jest sprzeczne z założeniem i kończy dowód. ■

Jak już powiedzieliśmy w podrozdziale 4.2.2, spełnione są wszystkie warunki, aby powiedzieć, że D z metryką Hilberta d_H jest przestrzenią $(1, \kappa)$-quasi geodezyjną spełniającą Aksjomat $1'$ oraz warunek (C). Możemy więc sformułować następujący wniosek.

Wniosek 4.20 ([52])
Niech D będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem w przestrzeni Banacha. Jeżeli $S = \{f_t : D \to D\}_{t \geqslant 0}$ jest jednoparametrową ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających w odniesieniu do metryki Hilberta d_H oraz istnieje takie $t_0 > 0$, że $\mathrm{Fix}(f_{t_0}) = \emptyset$ i przekształcenie f_{t_0} jest zwarte, to istnieje $\xi \in \partial D$, takie że półgrupa S zbiega jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

Jak również przedyskutowaliśmy wcześniej, pseudometryka Kobayashiego spełnia wszystkie warunki, aby sformułować następny wniosek, będący uogólnieniem twierdzenia Wolffa-Denjoya dla jednoparametrowych półgrup odwzorowań nieoddalających względem odległości Kobayashiego k_D, określonych na ograniczonych i ściśle wypukłych obszarach przestrzeni Banacha.

Wniosek 4.21 ([52])
Niech D będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha. Jeżeli $S = \{f_t : D \to D\}_{t \geqslant 0}$ jest jednoparametrową ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających w odniesieniu do odległości Kobayashiego k_D oraz istnieje takie $t_0 > 0$, że $\mathrm{Fix}(f_{t_0}) = \emptyset$ i przekształcenie f_{t_0} jest zwarte, to istnieje $\xi \in \partial D$, takie że półgrupa S zbiega jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

Powyższe dwa wnioski wydają się być nowymi wynikami w tym obszarze.

Rozdział 5

Hipoteza Karlssona-Nussbauma

5.1 Wprowadzenie

Twierdzenie Wolffa-Denjoya, które jest głównym tematem niniejszej rozprawy, na przestrzeni lat było uogólniane w wielu różnych kierunkach (co zostało szczegółowo omówione w rozdziale 2). Następnym naturalnym krokiem jest rozważanie uogólnienia twierdzenia Wolffa-Denjoya w postaci hipotezy Karlssona-Nussbauma, która została niezależnie sformułowana przez Karlssona [57] i Nussbauma [76].

W celu omówienia hipotezy Karlssona-Nussbauma będziemy potrzebować pojęcia atraktora.

Definicja 5.1 ([69])
Niech $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to D$ oraz $y \in D$. Wtedy $\omega_f(y)$ będzie oznaczać zbiór punktów skupienia (w topologii euklidesowej) ciągu $\{f^n(y)\}$ w punkcie y. Innymi słowy,

$$\omega_f(y) = \{x \in \overline{D} : \exists_{\{n_k\}} \text{ rosnący ciąg liczb naturalnych, taki że } \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(y) = x\}.$$

Atraktorem odwzorowania f nazywamy zbiór postaci

$$\Omega_f = \bigcup_{y\in D} \omega_f(y)$$

Jednym z uogólnień twierdzenia Wolffa-Denjoya jest wynik Beardona [12], który najpierw zauważył, że twierdzenie to może być rozpatrywane w kontekście czysto geometrycznym, zależnym od hiperbolicznych własności przestrzeni metrycznej [11], a następnie rozszerzył swój wynik na ściśle wypukłe obszary z metryką Hilberta [12]. Hipoteza Karlssona-Nussbauma głosi, że punkty skupienia orbit odwzorowań nieoddalających, które nie mają punktów stałych powinny zachowywać się podobnie, jak opisał to Beardon, w skończenie wymiarowej przestrzeni metrycznej Hilberta.

Hipoteza 5.2 (Hipoteza 8.3.7 [69])
Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Jeżeli $f : D \to D$ jest odwzorowaniem nieoddalającym nie mającym punktów stałych, określonym na przestrzeni metrycznej Hilberta (D, d_H), to istnieje taki wypukły zbiór $\Omega \subseteq \partial D$, że dla każdego $x \in D$ wszystkie punkty skupienia $\omega_f(x)$ orbity $O_f(x)$ leżą w zbiorze Ω.

W przypadku wypukłych, ograniczonych obszarów D wyposażonych w metrykę Hilberta d_H Karlsson i Noskov udowodnili [58], że atraktor $\Omega_f = \bigcup_{x \in D} \omega_f(x)$ odwzorowania nieoddalającego $f : D \to D$ nie mającego punktów stałych jest gwiaździstym podzbiorem ∂D. W szczególności sformułowali następujący lemat.

Lemat 5.3 (Lemat 8.3.8 [69])
Niech $D \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym, wypukłym obszarem oraz niech $f : (D, d_H) \to (D, d_H)$ będzie odwzorowaniem nieoddalającym nie mającym punktów stałych, takim że $\mathrm{co}(\omega_f(z)) \subseteq \partial D$ dla pewnego $z \in D$. Wtedy istnieje taki wypukły zbiór $\Omega \subseteq \partial D$, że dla dowolnego $x \in D$ mamy

$$\omega_f(x) \subseteq \Omega.$$

Dzięki temu powyższą hipotezę możemy sformułować w równoważnej formie.

Hipoteza 5.4 (Karlsson-Nussbaum)
Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Jeżeli $f : D \to D$ jest odwzorowaniem nieoddalającym nie mającym punktów stałych, określonym na przestrzeni metrycznej Hilberta (D, d_H), to istnieje taki $x \in D$, że otoczka wypukła zbioru jego punktów skupienia jest zawarta w brzegu D, tzn.

$$\mathrm{co}(\omega_f(x)) \subset \partial D.$$

Nussbaum przypuszczał, że dodając pewne założenia, podobne twierdzenie jest prawdziwe w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych (zob. Hipoteza 4.21 [76]).

Warto również zaznaczyć, że każdy wypukły podzbiór ściśle wypukłego zbioru w przestrzeniach o skończonym wymiarze redukuje się do jednego punktu. Zasadniczo pokazuje to znaczenie twierdzenia Wolffa-Denjoya jako szczególnego przypadku hipotezy Karlssona-Nussbauma. Z punktu widzenia dynamiki odwzorowań nieoddalających, hipoteza ta jest jednym z ważniejszych otwartych problemów w tym obszarze badań.

Sama hipoteza wciąż pozostaje otwartym problemem, ale w literaturze możemy znaleźć pewne bardzo szczególne jej rozwiązania. Krótko je teraz omówimy.

Rozpocznijmy od rozważań A. Karlssona, B. Lemmensa i R. Nussbauma ([55], [69]).

Twierdzenie 5.5 (Twierdzenie 3.3 [55])
Niech (Y, d) będzie właściwą przestrzenią metryczną i niech $f : Y \to Y$ będzie odwzorowaniem nieoddalającym nie mającym ograniczonych orbit. Wtedy dla każdego $y \in Y$ istnieje taki punkt $\xi \in \partial Y$ oraz ciąg $\{y_n\}$ dążący do ξ, że dla dowolnego $k \geqslant 0$,

$$b_y(f^k(y)) := \lim_{n\to\infty} d(f^k(y), y_n) - d(y_n, y) \leqslant -Ak,$$

gdzie

$$A := \lim_{n\to\infty} \frac{d(y, f^n(y))}{n}.$$

Co więcej,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_y(f^k(y))}{k} = -A.$$

Wykorzystując powyższe twierdzenie można pokazać następujący szczególny przypadek hipotezy Karlssona-Nussbauma.

Twierdzenie 5.6 (Wniosek 8.3.9 [69])
Niech $D \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym, wypukłym obszarem oraz niech $f : (D, d_H) \to (D, d_H)$ będzie odwzorowaniem nieoddalającym nie mającym punktów stałych i takim, że

$$\lim_{k\to\infty} \frac{d_H(f^k(y), y)}{k} > 0.$$

Wtedy istnieje taki zbiór $\Omega \subseteq \partial D$, że $\omega_f(y) \subseteq \Omega$ dla dowolnego $y \in D$.

W celu przedstawienia kolejnego częściowego wyniku omawianej hipotezy przypomnijmy następne stwierdzenie.

Stwierdzenie 5.7 (Stwierdzenie 8.3.2 [69])
Niech $D \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym, wypukłym obszarem wyposażonym w metrykę Hilberta d_H. Jeżeli $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ są ciągami zbieżnymi odpowiednio do dwóch różnych punktów x i y należących do brzegu ∂D oraz odcinek $[x, y] \nsubseteq \partial D$, wtedy dla każdego $z \in D$ istnieje taka stała $C \geqslant 0$, że

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{2}(d_H(x_k, z) + d_H(y_k, z) - d_H(x_k, y_k)) \leqslant C.$$

Powyższe stwierdzenie wykorzystuje pojęcie produktu Gromova, o którym powiemy więcej w następnym rozdziale. Wykorzystując powyższe stwierdzenie Karlsson i Noskov udowodnili następne twierdzenie.

Twierdzenie 5.8 (Twierdzenie 5.5 [58]/Twierdzenie 6 [57])
Niech $D \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym, wypukłym obszarem oraz niech $f : (D, d_H) \to (D, d_H)$ będzie odwzorowaniem nieoddalającym nie mającym punktów stałych. Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in \partial D$, że dla dowolnego $y \in D$ i $x \in \omega_f(y)$ zachodzi

$$[x, \xi] \subseteq \partial D.$$

Kolejnym dowodem potwierdzającym prawdziwość hipotezy Karlssona-Nussbauma jest następujący rezultat autorstwa Nussbauma.

Twierdzenie 5.9 (Twierdzenie 8.3.11 [69]/ [76])
Niech D będzie ograniczonym, wypukłym obszarem w $\mathbb{R}^n$ wyposażonym w metrykę Hilberta d_H. Jeżeli $f : D \to D$ jest odwzorowaniem nieoddalającym nie mającym punktów stałych oraz takim, że

$$\lim_{n\to\infty} d_H(f^{n+1}(y), f^n(y)) = 0$$

dla pewnego $y \in D$, wtedy istnieje taki wypukły zbiór $\Omega \subseteq \partial D$, że $\omega_f(x) \subseteq \Omega$ dla każdego $x \in D$.

W przypadku monotonicznych orbit Karlsson podaje kolejny wynik.

Twierdzenie 5.10 (Twierdzenie 7 [57])
Niech C będzie ograniczonym, wypukłym obszarem w $\mathbb{R}^n$ wyposażonym w metrykę Hilberta d_H oraz niech $f : C \to C$ będzie odwzorowaniem nieoddalającym. Załóżmy, że dla pewnego $x \in C$ ciąg $\{d(x, f^n(x))\}$ monotonicznie dąży do ∞, wtedy istnieje taki wypukły zbiór $\Omega \subseteq \partial D$, że $\omega_f(x) \subseteq \Omega$ dla każdego $x \in D$.

Na koniec A. Karlsson pisze w swojej pracy [57], że znajdując relację pomiędzy aproksymacyjną metodą Beardona a jego metodą opisaną w pracy [55], dzięki której można byłoby otrzymać obu metodami te same punkty brzegowe, pokazalibyśmy prawdziwość hipotezy Karlssona-Nussbauma. Nadal ten problem pozostaje otwarty. Jeśli jednak rozpatrzymy przestrzeń dwuwymiarową, co jest mocnym uproszczeniem sytuacji, wówczas można porównywać te punkty i hipoteza jest prawdziwa.

Twierdzenie 5.11 (Twierdzenie 9 [57])
Hipoteza Karlssona-Nussbauma jest prawdziwa w przestrzeni dwuwymiarowej.

5.2 Atraktor odwzorowania nieoddalającego

W tym rozdziale wykorzystamy pojęcie atraktora odwzorowania, które wprowadziliśmy we wcześniejszej części. Przy jego pomocy sformułujemy i udowodnimy twierdzenia, które są uogólnieniem twierdzenia typu Wolffa-Denjoya; możemy je nazwać pewnymi wariacjami dotyczącymi hipotezy Karlssona-Nussbauma.

Rozpoczniemy od wprowadzenia dwóch zbiorów.

Definicja 5.12 ([4])
Niech $D \subset V$ będzie wypukłym obszarem oraz weźmy $\xi \in \partial D$ i $F \subset \partial D$. Zdefiniujmy zbiory

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(\xi) &= \{x \in \partial D : [x, \xi] \subset \partial D\} \\ \mathrm{ch}(F) &= \bigcup_{\xi \in F} \mathrm{ch}(\xi). \end{aligned}$$

M. Abate i J. Raissy w swojej pracy [4] przedstawili dowód twierdzenia typu Wolffa-Denjoya dla odwzorowań nieoddalających względem odległości Kobayashiego, określonych na ograniczonych, ściśle wypukłych obszarach w $\mathbb{C}^n$.

Twierdzenie 5.13 (Twierdzenie 6 [4])
Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym, ściśle wypukłym obszarem oraz niech $f : (D, k_D) \to (D, k_D)$ będzie odwzorowaniem nieoddalającym nie mającym punktów stałych. Wtedy istnieje takie $\xi \in \partial D$, że

$$\Omega_f = \{\xi\},$$

tzn. ciąg iteracji $\{f^k\}$ zbiega do stałego odwzorowania ξ.

W dowodzie powyższego twierdzenia autorzy wykorzystali zbiory wprowadzone w Definicji 5.12. Rozważając wypukły obszar zamiast ściśle wypukłego, możemy spojrzeć na to twierdzenie, jak na jedną z wariacji na temat hipotezy Karlssona-Nussbauma.

Używając narzędzi M. Abate i J. Raissy sformułujemy teraz, wraz z dowodem, uogólnienie Twierdzenia 5.13 dla dowolnego odwzorowania nieoddalającego nie mającego ograniczonych orbit, określonego na ograniczonym i wypukłym obszarze przestrzeni $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$.

Twierdzenie 5.14 ([49])
Niech D będzie ograniczonym, wypukłym obszarem w rzeczywistej lub zespolonej przestrzeni skończenie wymiarowej V oraz niech (D, d) będzie zupełną przestrzenią geodezyjną spełniającą warunek (C), której topologia pokrywa się z topologią normy. Jeżeli $f : D \to D$ jest odwzorowaniem nieoddalającym nie mającym ograniczonych orbit, wtedy istnieje takie $\xi \in \partial D$, że

$$\Omega_f \subset \bigcap_{r \in \mathbb{R}} \mathrm{ch}(\overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||} \cap \partial D)$$

dla pewnego $z_0 \in D$.

Dowód. Ustalmy $y \in Y$. Bez straty ogólności załóżmy, że $d(f^n(y), y)$ dąży do ∞, ponieważ w przeciwnym przypadku istniałby punkt stały odwzorowania f, tak samo jak w dowodzie Twierdzenia 3.15. Wybierzmy $\xi \in \partial D$ spełniające założenia Lematu 3.2. Ustalmy $z_0 \in D$, $r \in \mathbb{R}$ i wybierzmy podciąg $\{f^{a_n}(y)\}$ ciągu iteracji f zbieżny do pewnej η. Na mocy Lematu 3.2 istnieją $z \in D$ i podciąg $\{a_{n_k}\}$ ciągu $\{a_n\}$, takie że

$$f^{a_{n_k}}(z) \in F_{z_0}(\xi, r)$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że

$$f^{a_{n_k}}(z) \to \zeta \in \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||}.$$

Ponieważ orbity przekształcenia f są rozbieżne do ∞ mamy, że $\eta, \zeta \in \partial D$. Zauważmy, że

$$d(f^{a_{n_k}}(z), f^{a_{n_k}}(y)) - d(f^{a_{n_k}}(y), y) \to -\infty, \qquad k \to \infty.$$

Zatem ze Stwierdzenia 3.10 wnioskujemy, że $[\eta, \zeta] \subset \partial D$, a stąd

$$\eta \in \mathrm{ch}(\overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||} \cap \partial D).$$

Ponieważ r został wybrany dowolnie, otrzymujemy

$$\Omega_f \subset \bigcap_{r \in \mathbb{R}} \mathrm{ch}(\overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||} \cap \partial D),$$

co kończy dowód. ■

Zauważmy, że powyższy wynik można uogólnić.

Twierdzenie 5.15 ([52])
Niech D będzie ograniczonym, wypukłym obszarem w rzeczywistej lub zespolonej przestrzeni skończenie wymiarowej V oraz niech (D, d) będzie zupełną przestrzenią geodezyjną spełniającą warunek (C), której topologia pokrywa się z topologią normy. Jeżeli $f : D \to D$ jest odwzorowaniem nieoddalającym nie mającym ograniczonych orbit, wtedy istnieje takie $\xi \in \partial D$, że

$$\Omega_f \subset \mathrm{ch}(\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||})$$

dla pewnego $z_0 \in D$.

Dowód. Ustalmy $y \in D$ oraz ciąg $\{a_n\}$ liczb naturalnych. Identycznie jak w dowodzie Twierdzenia 5.14 rozumujemy, że $d(f^n(y), y) \to \infty$, gdy $n \to \infty$. Załóżmy, że $f^{a_n}(y) \to \eta \in \partial D$. Na mocy Lematu 3.2 możemy wybrać $\xi \in \partial D$ i ustalić $z_0 \in D$ oraz $r \in \mathbb{R}$, takie że istnieją $z \in D$ oraz podciąg $\{a_{n_k}\}$ ciągu $\{a_n\}$, dla których

$$f^{a_{n_k}}(z) \in F_{z_0}(\xi, r)$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że

$$f^{a_{n_k}}(z) \to \zeta_r \in \partial D \cap \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||}, \qquad k \to \infty.$$

Ponieważ

$$d(f^{a_{n_k}}(z), f^{a_{n_k}}(y)) \leqslant d(z, y),$$

więc ze Stwierdzenia 3.10 wynika, że $[\eta, \zeta_r] \subset \partial D$, tzn. dla każdego $r \in \mathbb{R}$ istnieje taka

$$\zeta_r \in \partial D \cap \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||},$$

że $\eta \in \mathrm{ch}(\zeta_r)$. Rozważmy malejący ciąg $\{r_n\}$, taki że $r_n \to -\infty$, gdy $n \to \infty$. Mamy więc, że ciąg $\{\zeta_{r_n}\} \subset \partial D$, a odcinki o końcach w punktach η i ζ_r leżą na brzegu. Ponieważ brzeg ∂D jest zwarty w $\overline{D}$, to istnieje podciąg $\{r_{n_k}\}$ ciągu $\{r_n\}$ taki, że $\zeta_{r_{n_k}} \to \zeta \in \partial D$, gdy $k \to \infty$. Ustalmy k_0. Zauważmy, że dla $k \geqslant k_0$,

$$\zeta_{r_{n_k}} \in \overline{F_{z_0}(\xi, r_{n_k})}^{||\cdot||} \subset \overline{F_{z_0}(\xi, r_{n_{k_0}})}^{||\cdot||},$$

a stąd

$$\zeta \in \overline{F_{z_0}(\xi, r_{n_{k_0}})}^{||\cdot||}.$$

Ponieważ k_0 było wybrane dowolnie,

$$\zeta \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{F_{z_0}(\xi, r_{n_k})}^{||\cdot||} = \bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||}.$$

Pozostaje nam pokazać, że $\eta \in \mathrm{ch}(\zeta)$. Ustalmy $s \in [0, 1]$ i zauważmy, że

$$||s\zeta_{r_{n_k}} + (1-s)\eta - (s\zeta + (1-s)\eta)|| = s||\zeta_{r_{n_k}} - \zeta|| \to 0,$$

gdy $k \to \infty$, co oznacza, że $[\zeta, \eta] \in \partial D$. Zatem

$$\eta \in \mathrm{ch}(\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||}),$$

co należało udowodnić. ■

Duża horokula nie zawsze jest zbiorem wypukłym (zob. [4]). Jednak w swojej pracy M. Abate i J. Raissy [4] udowodnili, że duża horokula rozważana w ograniczonym i wypukłym obszarze z odległością Kobayashiego jest zbiorem gwiaździstym względem środka horokuli. Przedstawimy teraz uogólnienie tego faktu dla wszystkich przestrzeni metrycznych spełniających warunek (C).

Lemat 5.16 ([52])
Niech D będzie ograniczonym, wypukłym obszarem w rzeczywistej lub zespolonej przestrzeni skończenie wymiarowej V oraz niech (D, d) będzie zupełną przestrzenią geodezyjną spełniającą warunek (C), której topologia pokrywa się z topologią normy. Jeżeli $z_0 \in D$, $r > 0$ oraz $\xi \in \partial D$, to dla dowolnego $\eta \in \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||}$ mamy

$$[\eta, \xi] \subset \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||}.$$

Dowód. Ustalmy $\eta \in F_{z_0}(\xi, r)$ oraz wybierzmy ciąg $\{x_n\} \subset D$ zbieżny do $\xi \in \partial D$ i taki, że granica

$$\lim_{n\to\infty} d(\eta, x_n) - d(x_n, z_0) \leqslant r$$

istnieje. Ustalmy $s \in (0, 1)$. Korzystając z warunku (C) mamy

$$\limsup_{n\to\infty} d(s\eta + (1-s)x_n, x_n) - d(x_n, z_0) \leqslant \lim_{n\to\infty} d(\eta, x_n) - d(x_n, z_0) \leqslant r. \tag{5.1}$$

Zauważmy, że

$$||s\eta + (1-s)x_n - (s\eta + (1-s)\xi)|| = (1-s)||x_n - \xi|| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Ponieważ topologie przestrzeni (D, d) i $(\overline{D}, ||\cdot||)$ pokrywają się na D, otrzymujemy

$$d(s\eta + (1-s)x_n, s\eta + (1-s)\xi) \to 0,$$

gdy $n \to \infty$. Stąd

$$|d(s\eta + (1-s)x_n, x_n) - d(x_n, s\eta + (1-s)\xi)| \leqslant d(s\eta + (1-s)x_n, s\eta + (1-s)\xi) \to 0, \tag{5.2}$$

gdy $n \to \infty$. Zatem korzystając z (5.1) oraz z (5.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\liminf_{w\to\xi} d(s\eta + (1-s)\xi, w) - d(w, z_0) &\leqslant \limsup_{n\to\infty} d(s\eta + (1-s)\xi, x_n) - d(x_n, z_0) \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} d(s\eta + (1-s)\xi, x_n) - d(x_n, s\eta + (1-s)x_n) \\
&\quad + \limsup_{n\to\infty} d(s\eta + (1-s)x_n, x_n) - d(x_n, z_0) \\
&\leqslant r.
\end{aligned}$$

Stąd dla dowolnego $s \in (0, 1)$, punkt $s\eta + (1-s)\xi \in F_{z_0}(\xi, r)$, czyli $(\eta, \xi) \subset F_{z_0}(\xi, r)$. Przechodząc do domknięcia otrzymujemy więc, że $[\eta, \xi] \subset \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||}$.

Aby zakończyć dowód rozważmy przypadek, gdy $\eta \in \partial F_{z_0}(\xi, r)$. Istnieje więc taki ciąg $\{y_n\} \subset F_{z_0}(\xi, r)$, że $y_n \to \eta$, gdy $n \to \infty$. Z wcześniejszych rozważań mamy $[y_n, \xi] \subset \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||}$ dla każdego naturalnego n. Ustalmy $s \in [0, 1]$. Wtedy

$$||s\eta + (1-s)\xi - (sy_n + (1-s)\xi)|| = s||\eta - y_n|| \to 0,$$

gdy $n \to \infty$, co oznacza, że $s\eta + (1-s)\xi \in \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||}$, gdyż $\{sy_n + (1-s)\xi\} \subset \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||}$. Zatem $[\eta, \xi] \subset \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||}$, co kończy dowód. ■

Twierdzenie 5.15 w połączeniu z Lematem 5.16 daje natychmiastowy rezultat.

Twierdzenie 5.17 ([52])
Niech D będzie ograniczonym, wypukłym obszarem w rzeczywistej lub zespolonej przestrzeni skończenie wymiarowej V oraz niech (D, d) będzie zupełną przestrzenią geodezyjną spełniającą warunek (C), której topologia pokrywa się z topologią normy. Jeżeli $f : D \to D$ jest odwzorowaniem nieoddalającym nie mającym ograniczonych orbit, wtedy istnieje takie $\xi \in \partial D$, że

$$\Omega_f \subset \mathrm{ch}(\mathrm{ch}(\xi)).$$

Dowód. Ustalmy $z_0 \in D$. Z Twierdzenia 5.15 istnieje takie $\xi \in \partial D$, że

$$\Omega_f \subset \mathrm{ch}(\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||}).$$

Z Uwagi 1.43 mamy, że

$$\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||} \subset \partial D.$$

Weźmy $\zeta \in \bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||}$. Z Lematu 5.16 wynika, że $[\zeta, \xi] \subset \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||}$dla dowolnego $r \in \mathbb{R}$. Stąd $[\zeta, \xi] \subset \bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||}$. Zatem $\zeta \in \mathrm{ch}(\xi)$, czyli

$$\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||} \subset \mathrm{ch}(\xi).$$

Ostatecznie

$$\Omega_f \subset \mathrm{ch}(\mathrm{ch}(\xi)),$$

co kończy dowód. ■

W kontekście metryki Hilberta A. Karlsson przedstawił pewien fakt, niezbędny przykładowo w dowodzie Twierdzenia 5.9. Pełną wypowiedź tej własności podamy w Lemacie 5.31, w podrozdziale 5.5. Teraz warunek występujący we wspomnianym stwierdzeniu nazwiemy Aksjomatem 2*.

Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w przestrzeni skończenie wymiarowej V oraz niech (D, d) będzie przestrzenią metryczną.

Aksjomat 2* Jeżeli $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ są ciągami w D zbiegającymi do różnych punktów na brzegu przestrzeni ∂D, których granicami są odpowiednio x oraz y oraz odcinek $[x, y] \nsubseteq \partial D$, to dla dowolnego $z \in D$ mamy

$$\lim_{n \to \infty} [d(x_n, y_n) - \max\{d(x_n, z), d(y_n, z)\}] = \infty.$$

Jak wspomnieliśmy we wcześniejszym podrozdziale, Twierdzenie 5.8 głosi, że atraktor Ω_f odwzorowania nieoddalającego względem metryki Hilberta zawiera się w gwiaździstym podzbiorze brzegu przestrzeni. A. Karlsson [57] udowodnił to twierdzenie wykorzystując produkt Gromova oraz istotny był fakt, że geodezyjnymi są liniowe odcinki. Na koniec tego podrozdziału przedstawimy znacznie krótszy dowód tego twierdzenia dla wszystkich przestrzeni spełniających Aksjomat 2* i niewykorzystujący produktu Gromova.

Twierdzenie 5.18 ([52])
Niech $D \subset V$ będzie ograniczonym i wypukłym obszarem oraz niech (D, d) będzie zupełną przestrzenią geodezyjną spełniającą Aksjomat 2^*, której topologia pokrywa się z topologią normy. Załóżmy. że $f : D \to D$ jest odwzorowaniem nieoddalającym bez ograniczonych orbit. Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in \partial D$, że

$$\Omega_f \subset \mathrm{ch}(\xi).$$

Dowód. Ustalmy $y \in Y$ oraz zdefiniujmy ciąg odległości $\{d_n\}$, jako $d_n = d(f^n(y), y)$. Ponieważ z założenia odwzorowanie f nie ma ograniczonych orbit, to ciąg odległości $\{d_n\}$, zdefiniowany jako $d_n = d(f^n(y), y)$, jest nieograniczony. Na mocy twierdzenia Całki (Tw. 1.11) wnioskujemy, że $d_n \to \infty$, gdy $n \to \infty$. Z Lematu 1.41 istnieje taki ciąg liczb naturalnych $\{\varphi(i)\}$, że $d_m < d_{\varphi(i)}$ dla $m < \varphi(i)$, $i = 1, 2, \ldots$. Ponieważ z Lematu 3.9 przestrzeń metryczna (D, d) spełnia Aksjomat 1, przechodząc do innego podciągu, jeśli jest taka potrzeba, możemy założyć, że ciąg $\{f^{\varphi(i)}(y)\}$ dąży do pewnego punktu $\xi \in \partial Y$ z brzegu przestrzeni. Ustalmy $x \in D$ i wybierzmy podciąg $\{f^{a_k}(x)\}$ ciągu iteracji f zbieżny do pewnej $\eta \in \partial D$. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$. Wtedy, korzystając z nierówności trójkąta oraz z założenia, że odwzorowanie f jest nieoddalające, dla dostatecznie dużych n_i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& d(f^{a_k}(x), f^{n_i}(y)) - d(f^{n_i}(y), y) \\
\leqslant\ & d(f^{a_k}(x), f^{a_k}(y)) + d(f^{a_k}(y), f^{n_i}(y)) - d(f^{n_i}(y), y) \\
\leqslant\ & d(x, y) + d(f^{n_i - a_k}(y), y) - d(f^{n_i}(y), y) \\
\leqslant\ & d(x, y) + d(f^{n_i}(y), y) - d(f^{n_i}(y), y) \\
\leqslant\ & d(x, y).
\end{aligned}$$

Stąd istnieje taki podciąg $\{n_{i_k}\}$ ciągu $\{n_i\}$, że dla dowolnego k

$$d(f^{a_k}(x), f^{n_{i_k}}(y)) - d(f^{n_{i_k}}(y), y) \leqslant d(x, y). \tag{5.3}$$

Zatem z (5.3) mamy

$$\begin{aligned}
& \liminf_{k\to\infty} d(f^{a_k}(x), f^{n_{i_k}}(y)) - \max\{d(f^{a_k}(x), y), d(f^{n_i}(y), y)\} \\
\leqslant\ & \liminf_{k\to\infty} d(f^{a_k}(x), f^{n_{i_k}}(y)) - d(f^{n_{i_k}}(y), y) \\
\leqslant\ & d(x, y).
\end{aligned}$$

Na mocy Aksjomatu 2^* otrzymujemy, że $[\eta, \xi] \subset \partial D$, a stąd $\eta \in \mathrm{ch}(\xi)$. Co należało udowodnić. ■

5.3 Atraktor jednoparametrowej półgrupy

W trzecim podrozdziale wprowadzimy pojęcie atraktora w kontekście jednoparametrowej półgrupy. Przy jego pomocy sformułujemy wraz z dowodem odpowiednik Twierdzenia 5.15 w przypadku ciągłym. Następnie pokażemy, że dla jednoparametrowej ciągłej półgrupy odwzorowań nieoddalających określonych na przestrzeni metrycznej spełniającej warunek (C) zachodzi $\Omega_S \subset \mathrm{ch}(\mathrm{ch}(\xi))$. Co więcej, dla przestrzeni spełniających Aksjomat 2^* podamy ciągły odpowiednik Twierdzenia 5.18.

Definicja 5.19
Niech $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in D$ oraz niech $S = \{f_t : D \to D\}_{t \geqslant 0}$ będzie jednoparametrową półgrupą. Oznaczmy symbolem $\omega_S(x)$ zbiór punktów skupienia (w topologii normy) półgrupy S określony jako

$$\omega_S(x) = \{y \in \overline{D} : ||f_{t_n}(x) - y|| \to 0 \text{ dla pewnego rosnącego ciągu } \{t_n\} \to \infty\}.$$

Co więcej, atraktorem półgrupy S nazywamy zbiór Ω_S zdefiniowany jako

$$\Omega_S = \bigcup_{x \in D} \omega_S(x).$$

Na potrzeby rozważań prowadzonych w tym podrozdziale wprowadzimy kolejną własność przestrzeni metrycznych, którą nazwiemy Aksjomatem 5.

Niech (Y, d) będzie przestrzenią metryczną spełniającą Aksjomat 1.

Aksjomat 5 Jeżeli $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ są ciągami w Y oraz $d(x_n, y_n) \to 0$, gdy $n \to \infty$, to

$$\overline{d}(x_n, y_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Następne twierdzenie (por. Twierdzenie 3.4 [65]) daje nam kolejną własność odległości Kobayashiego.

Twierdzenie 5.20 ([65])
Niech D będzie ograniczonym, wypukłym obszarem w przestrzeni Banacha. Wtedy

$$\operatorname{arg\,tgh}\left(\frac{||x - y||}{\operatorname{diam}_{||\cdot||} D}\right) \leqslant k_D(x, y)$$

dla dowolnych $x, y \in D$.

Z powyższego twierdzenia wynika, że przykładem przestrzeni, która spełnia Aksjomat 5 (względem domknięcia w normie $(\overline{D}, ||\cdot||)$) jest wypukły, ograniczony obszar w przestrzeni $\mathbb{C}^n$ wyposażony w odległość Kobayashiego.

Drugim przykładem jest wypukły, ograniczony obszar w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z metryką Hilberta. Potwierdzeniem tego jest następne twierdzenie, które sformułujemy ogólniej, a w dowodzie wykorzystamy metrykę Hilberta wprowadzoną zgodnie z Definicją 1.12.

Twierdzenie 5.21 ([52])
Niech D będzie ograniczonym, wypukłym obszarem w rzeczywistej przestrzeni Banacha oraz niech $\{x_n\}, \{y_n\} \subset D$. Jeżeli $d_H(x_n, y_n) \to 0$, gdy $n \to \infty$, to

$$||x_n - y_n|| \to 0, \quad n \to 0.$$

Dowód. Niech $\{x_n\}, \{y_n\} \subset D$ oraz dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ rozważmy prostą przechodzącą przez punkty x_n i y_n, przecinającą brzeg zbioru D w dwóch punktach a_n i b_n w taki sposób, że x_n leży pomiędzy a_n i y_n oraz y_n leży pomiędzy x_n i b_n. Wtedy

$$\begin{aligned} d_H(x_n, y_n) &= \log\left(\frac{||y_n - a_n|| \cdot ||x_n - b_n||}{||x_n - a_n|| \cdot ||y_n - b_n||}\right) \\ &= \log\left(\frac{(||x_n - a_n|| + ||x_n + y_n||)(||y_n - b_n|| + ||x_n - y_n||)}{||x_n - a_n|| \cdot ||y_n - b_n||}\right) \\ &= \log\left(\left(1 + \frac{||x_n - y_n||}{||x_n - a_n||}\right)\left(1 + \frac{||x_n - y_n||}{||y_n - b_n||}\right)\right). \end{aligned}$$

Niech $d = \operatorname{diam} D$. Zauważmy, że $||x_n - a_n|| \leqslant d$ oraz $||y_n - b_n|| \leqslant d$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$\left(1 + \frac{||x_n - y_n||}{||x_n - a_n||}\right)\left(1 + \frac{||x_n - y_n||}{||y_n - b_n||}\right) \geqslant \left(1 + \frac{||x_n - y_n||}{d}\right)\left(1 + \frac{||x_n - y_n||}{d}\right).$$

Rozważmy podciągi $\{x_{n_k}\}$ i $\{y_{n_k}\}$ odpowiednio ciągów $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$. Gdyby istniała $\delta > 0$ i $k_0 \in \mathbb{N}$, takie że $||x_{n_k} - y_{n_k}|| \geqslant \delta$ dla $k \geqslant k_0$, to

$$\left(1 + \frac{||x_{n_k} - y_{n_k}||}{d}\right)\left(1 + \frac{||x_{n_k} - y_{n_k}||}{d}\right) \geqslant \left(1 + \frac{\delta}{d}\right)\left(1 + \frac{\delta}{d}\right) = \delta_1 > 1. \tag{5.4}$$

Ponieważ z założenia $d_H(x_n, y_n) \to 0$, gdy $n \to \infty$, to możemy dobrać takie $\varepsilon > 0$, że

$$\left(1 + \frac{||x_n - y_n||}{||x_n - a_n||}\right)\left(1 + \frac{||x_n - y_n||}{||y_n - b_n||}\right) < 1 + \varepsilon < \delta_1$$

dla dostatecznie dużych n, co stanowi sprzeczność z (5.4). Zatem $||x_n - y_n|| \to 0$, gdy $n \to \infty$. ■

Sformułujemy teraz wraz z dowodem lemat głoszący, że atraktor półgrupy S jest tym samym zbiorem co atraktor odwzorowania f_{t_0} dla pewnego $t_0 > 0$.

Lemat 5.22 ([52])
Niech D będzie ograniczonym, wypukłym obszarem w rzeczywistej lub zespolonej przestrzeni skończenie wymiarowej V oraz niech (D, d) będzie zupełną przestrzenią geodezyjną spełniającą Aksjomat 5, której topologia pokrywa się z topologią normy. Załóżmy, że $S = \{f_t : D \to D\}_{t \geqslant 0}$ jest jednoparametrową, ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających bez ograniczonych orbit. Wtedy dla każdego $t_0 > 0$ zachodzi

$$\Omega_S = \Omega_{f_{t_0}}.$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $t_0 > 0$.
" $\supset$ " Weźmy $\eta \in \Omega_{f_{t_0}}$. Oznacza to, że istnieją x_0 oraz podciąg $\{f_{t_0}^{a_n}(x_0)\}$ ciągu $\{f_{t_0}^{n}(x_0)\}$, takie że $f_{t_0}^{a_n}(x_0) \to \eta$, gdy $n \to \infty$. Z definicji półgrupy zauważmy, że $f_{t_0}^{n}(x) = f_{nt_0}(x)$. Zatem $f_{nt_0}(x) \to \eta$, gdy $n \to \infty$. Stąd $\eta \in \Omega_S$.
" $\subset$ " Aby pokazać przeciwną inkluzję rozważmy $\eta \in \Omega_S$. Oznacza to, że istnieje monotoniczny ciąg $t_1 < t_2 < \dots,\ t_n \to \infty$ oraz $x_0 \in D$, takie że

$$||f_{t_n}(x_0) - \eta|| \to 0, \tag{5.5}$$

gdy $n \to \infty$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieją $a_n \in \mathbb{N}$ oraz $s_n \in [0, t_0)$, takie że $t_n = a_n t_0 + s_n$. Ponadto $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots$. Rozważając podciąg tego ciągu możemy założyć, że $a_1 < a_2 < \dots$. Z definicji półgrupy zauważmy, że

$$f_{t_n}(x_0) = f_{a_n t_0 + s_n}(x_0) = f_{t_0}^{a_n}(f_{s_n}(x_0)).$$

Przechodząc do podciągu możemy założyć, że $s_n \to s_0 \in [0, t_0]$. Stąd i z ciągłości półgrupy wnioskujemy, że

$$d(f_{s_n}(x_0), f_{s_0}(x_0)) \to 0, \tag{5.6}$$

gdy $n \to \infty$. Z (5.6) oraz z faktu, że odwzorowanie f_{t_0} jest nieoddalające otrzymujemy

$$d(f_{t_0}^{a_n}(f_{s_n}(x_0)), f_{t_0}^{a_n}(f_{s_0}(x_0))) \leqslant d(f_{s_n}(x_0), f_{s_0}(x_0)) \to 0,$$

gdy $n \to \infty$. Ponieważ z założenia spełniony jest Aksjomat 5 mamy

$$||f_{t_0}^{a_n}(f_{s_n}(x_0)) - f_{t_0}^{a_n}(f_{s_0}(x_0))|| \to 0, \tag{5.7}$$

gdy $n \to \infty$. Zatem z nierówności trójkąta, z (5.5) oraz z (5.7) ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned} ||f_{t_0}^{a_n}(f_{s_0}(x_0)) - \eta|| &\leqslant ||f_{t_0}^{a_n}(f_{s_0}(x_0)) - f_{t_0}^{a_n}(f_{s_n}(x_0))|| + ||f_{t_0}^{a_n}(f_{s_n}(x_0)) - \eta|| \\ &\leqslant ||f_{t_0}^{a_n}(f_{s_0}(x_0)) - f_{t_0}^{a_n}(f_{s_n}(x_0))|| + ||f_{t_n}(x_0) - \eta|| \to 0, \end{aligned}$$

gdy $n \to \infty$. Co oznacza, że

$$\eta \in \omega_{f_{t_0}}(f_{s_0}(x_0)) \subset \Omega_{f_{t_0}}$$

i kończy dowód. ■

Wykorzystując powyższy lemat udowodnimy odpowiednik Twierdzenia 5.15, w przypadku ciągłym.

Twierdzenie 5.23 ([52])
Niech D będzie ograniczonym, wypukłym obszarem w rzeczywistej lub zespolonej przestrzeni skończenie wymiarowej V oraz niech (D, d) będzie zupełną przestrzenią geodezyjną spełniającą Aksjomat 5 i warunek (C), której topologia pokrywa się z topologią normy. Jeżeli $S = \{f_t : D \to D\}_{t \geqslant 0}$ jest ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających bez ograniczonych orbit, wtedy istnieje takie $\xi \in \partial D$, że

$$\Omega_S \subset \mathrm{ch}(\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||})$$

dla pewnego $z_0 \in D$.

Dowód. Ustalmy dowolnie $t_0 > 0$. Na mocy Twierdzenia 5.15 mamy

$$\Omega_{f_{t_0}} \subset \mathrm{ch}(\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{F_{z_0}(\xi, r)}^{||\cdot||}).$$

Z Lematu 5.22 wynika, że $\Omega_{f_{t_0}} = \Omega_S$, co kończy dowód. ■

Ponownie wykorzystując Lemat 5.22, w połączeniu odpowienio z Twierdzeniem 5.17, albo z Twierdzeniem 5.18, pozwala nam to otrzymać poniższe dwa rezultaty.

Twierdzenie 5.24 ([52])
Niech D będzie ograniczonym, wypukłym obszarem w rzeczywistej lub zespolonej przestrzeni skończenie wymiarowej V oraz niech (D, d) będzie zupełną przestrzenią geodezyjną spełniającą Aksjomat 5 i warunek (C), której topologia pokrywa się z topologią normy. Jeżeli $S = \{f_t : D \to D\}_{t \geqslant 0}$ jest ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających bez ograniczonych orbit, wtedy istnieje takie $\xi \in \partial D$, że

$$\Omega_S \subset \mathrm{ch}(\mathrm{ch}(\xi)).$$

Twierdzenie 5.25 ([52])
Niech $D \subset V$ będzie ograniczonym i wypukłym obszarem oraz niech (D, d) będzie zupełną przestrzenią geodezyjną spełniającą Aksjomat 2^* i Aksjomat 5, której topologia pokrywa się z topologią normy. Jeżeli $S = \{f_t : D \to D\}_{t \geqslant 0}$ jest ciągłą półgrupą odwzorowań nieoddalających bez ograniczonych orbit, wtedy istnieje takie $\xi \in \partial D$, że

$$\Omega_S \subset \mathrm{ch}(\xi).$$

Dla spójności rozprawy nie omawiamy już w tym miejscu odpowiedników powyższych twierdzeń w przypadku nieskończenie wymiarowym, ale warto podkreślić, że podobne rezultaty są prawdziwe, rozpatrując odwzorowania zwarte w przestrzeniach (λ, κ)-quasi geodezyjnych.

5.4 Rezolwenta odwzorowania nieoddalającego

W tym podrozdziale opiszemy konstrukcję rezolwenty odwzorowania nieoddalającego w kontekście przestrzeni metrycznej Hilberta. Niech $D \subset V$ będzie wypukłym, ograniczonym obszarem oraz niech $F : D \to D$ będzie odwzorowaniem nieoddalającym w odniesieniu do metryki Hilberta d_H na zbiorze D. Przypominamy, że że topologia przestrzeni (D, d_H) pokrywa się z topologią przestrzeni euklidesowej oraz (D, d_H) jest właściwą przestrzenią geodezyjną.

Ustalmy $x \in D$ i $\lambda > 0$. Zdefiniujmy odwzorowanie $G_{x,\lambda}$ określone jako

$$G_{x,\lambda}(y) = \frac{1}{1+\lambda}x + \frac{\lambda}{1+\lambda}F(y), \qquad y \in D.$$

Zauważmy, że

$$G_{x,\lambda}(y) = x + \frac{\lambda}{1+\lambda}(F(y) - x), \qquad y \in D.$$

Stąd na mocy Lematu 1.19 otrzymujemy, że $G_{x,\lambda}$ jest odwzorowaniem kontrakcyjnym.

Pokażemy teraz, że $G_{x,\lambda}(D)$ jest ograniczony. W tym celu wybierzmy $w \in G_{x,\lambda}(D)$ i zauważmy, że istnieje taki $y \in D$, że

$$w = \frac{1}{1+\lambda}x + \frac{\lambda}{1+\lambda}F(y).$$

Udowodnimy, że $B(w, \frac{1}{1+\lambda}d) \subset D$, gdzie

$$d = \inf_{v \in \partial D} ||v - x||.$$

Wybierzmy dowolnie $w' \in B(w, \frac{1}{1+\lambda}d)$. Wtedy istnieje taki $z \in D$, że

$$w' = \frac{1}{1+\lambda}z + \frac{\lambda}{1+\lambda}F(y).$$

Zauważmy, że

$$||w - w'|| = \left\| \frac{1}{1+\lambda}x + \frac{\lambda}{1+\lambda}F(y) - \frac{1}{1+\lambda}z + \frac{\lambda}{1+\lambda}F(y) \right\| = \frac{1}{1+\lambda}||x - z||.$$

Jeżeli $||w - w'|| < \frac{1}{1+\lambda}$, wtedy

$$||x - z|| = (1 + \lambda)||w - w'|| < d.$$

To implikuje, że $z \in D$ i stąd $w' \in D$. Zatem dla każdego $w \in G_{x,\lambda}(D)$

$$\inf_{v \in \partial D} ||v - w|| \geqslant \frac{1}{1+\lambda} d. \tag{5.8}$$

Weźmy teraz ciąg $\{w_n\} \subset G_{x,\lambda}(D)$. Ponieważ $\overline{D}$ jest zbiorem zwartym w topologii euklidesowej, istnieją podciąg $\{w_{n_k}\}$ ciągu $\{w_n\}$ oraz $x_0 \in \overline{D}$, takie że $||w_{n_k} - x_0|| \to 0$, gdy $k \to \infty$. Z (5.8) wynika, że $x_0 \in D$. Stąd oraz z faktu, że topologia przestrzeni (D, d) pokrywa się z topologią euklidesową, otrzymujemy, że $d(w_{n_k}, x_0) \to 0$. Zatem zbiór $G_{x,\lambda}(D)$ jest ograniczony w (D, d) i ponieważ przestrzeń D jest właściwa wnioskujemy, że zbiór $\overline{G_{x,\lambda}(D)}^d$ jest zwarty w (D, d).

Zauważmy, że $D \supset G_{x,\lambda}(D) \supset G^2_{x,\lambda}(D) \supset ...$, co oznacza, że orbity odwzorowania $G_{x,\lambda}$ są ograniczone. Ustalmy $y \in D$. Ponieważ $\overline{G_{x,\lambda}(D)}^d$ jest zwarty, istnieje podciąg $\{G^{n_k}_{x,\lambda}(y)\}$ ciągu $\{G^n_{x,\lambda}(y)\}$ dążący do pewnego $z \in D$. Zdefiniujmy ciąg $\{d_n\}$ określony następująco

$$d_n = d(G^n_{x,\lambda}(y), G^{n+1}_{x,\lambda}(y)).$$

Ponieważ $G_{x,\lambda}$ jest odwzorowaniem kontrakcyjnym, ciąg $\{d_n\}$ jest malejący i stąd zbieżny do pewnego ζ, gdy $n \to \infty$. Wybierając dwa podciągi $\{d_{n_k}\}$ i $\{d_{n_k+1}\}$ ciągu $\{d_n\}$, otrzymujemy

$$\zeta \leftarrow d_{n_k} = d(G^{n_k}_{x,\lambda}(y), G^{n_k+1}_{x,\lambda}(y)) \to d(G_{x,\lambda}(z), z)$$

oraz

$$\zeta \leftarrow d_{n_k+1} = d(G^{n_k+1}_{x,\lambda}(y), G^{n_k+2}_{x,\lambda}(y)) \to d(G^2_{x,\lambda}(z), G_{x,\lambda}(z)).$$

Zatem

$$d(G^2_{x,\lambda}(z), G_{x,\lambda}(z)) = d(G_{x,\lambda}(z), z) = \zeta.$$

Ponieważ odwzorowanie $G_{x,\lambda}$ jest kontrakcyjne, to

$$G_{x,\lambda}(z) = z. \tag{5.9}$$

Co więcej, z jest jedynym punktem stałym odwzorowania $G_{x,\lambda}$. Jeżeli bowiem założymy przeciwnie, że $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$, są punktami stałymi przekształcenia $G_{x,\lambda}$, to

$$d(z_1, z_2) = d(G_{x,\lambda}(z_1), G_{x,\lambda}(z_2)) < d(z_1, z_2),$$

co prowadzi do sprzeczności. Jednoznaczny punkt stały z zdefiniujmy jako

$$z := R_\lambda(x) \tag{5.10}$$

dla $\lambda > 0$ i $x \in D$. Wtedy z (5.9) i (5.10) mamy

$$z = G_{x,\lambda}(z) = \frac{1}{1+\lambda}x + \frac{\lambda}{1+\lambda}F(z), \qquad x \in D,\ \lambda > 0,$$

a stąd

$$R_\lambda(x) = \frac{1}{1+\lambda}x + \frac{\lambda}{1+\lambda}F(R_\lambda(x)), \qquad x \in D,\ \lambda > 0. \tag{5.11}$$

Definicja 5.26 ([8])
Niech $F : D \to D$ oraz $\lambda > 0$. Odwzorowanie $R_\lambda : D \to D$ określone wzorem

$$R_\lambda(x) = \frac{1}{1+\lambda}x + \frac{\lambda}{1+\lambda}F(R_\lambda(x))$$

nazywamy *rezolwentą odwzorowania F*.

Ponadto każdy zbieżny podciąg $G^{n_k}_{x,\lambda}(y)$ ma granicę z (jednoznaczny punkt stały), gdy $k \to \infty$. Stąd otrzymujemy rezolwentę R_λ w postaci

$$\lim_{n\to\infty} G^n_{x,\lambda}(y) = R_\lambda(x), \qquad y \in D. \tag{5.12}$$

Okazuje się, że jeżeli przestrzeń metryczna (D, d) jest wystarczająco regularna, to rezolwenta odwzorowania nieoddalającego jest również odwzorowaniem nieoddalającym.

Lemat 5.27 (por. [8])
Niech (D, d_H) będzie przestrzenią metryczną Hilberta spełniającą warunek (D) oraz niech $F : D \to D$ będzie odwzorowaniem nieoddalającym. Wtedy dla $\lambda > 0$, rezolwenta $R_\lambda : D \to D$ jest odwzorowaniem nieoddalającym.

Dowód. Ustalmy $z_0, z_1, z_2 \in D$. Na początku pokażemy, że

$$d_H(G^n_{z_1,\lambda}(z_0), G^n_{z_2,\lambda}(z_0)) \leqslant d_H(z_1, z_2)$$

dla każdego n. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie. Dla $n = 1$ z warunku (D) otrzymujemy

$$\begin{aligned} d_H(G_{z_1,\lambda}(z_0), G_{z_2,\lambda}(z_0)) &= d_H\left(\frac{1}{1+\lambda}z_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}F(z_0), \frac{1}{1+\lambda}z_2 + \frac{\lambda}{1+\lambda}F(z_0)\right) \\ &\leqslant \max\{d_H(z_1, z_2), d_H(F(z_0), F(z_0))\} = d_H(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $d_H(G^n_{z_1,\lambda}(z_0), G^n_{z_2,\lambda}(z_0)) \leqslant d_H(z_1, z_2)$. Z warunku (D) wnioskujemy, że

$$\begin{aligned} d_H(G^{n+1}_{z_1,\lambda}(z_0), G^{n+1}_{z_2,\lambda}(z_0)) &= d_H\left(\frac{1}{1+\lambda}z_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}F(G^n_{z_1,\lambda}(z_0)), \frac{1}{1+\lambda}z_2 + \frac{\lambda}{1+\lambda}F(G^n_{z_2,\lambda}(z_0))\right) \\ &\leqslant \max\{d_H(z_1, z_2), d_H(G^n_{z_1,\lambda}(z_0), G^n_{z_2,\lambda}(z_0))\} = d_H(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Stąd i z (5.12) mamy

$$d_H(R_\lambda(z_1), R_\lambda(z_2)) = \lim_{n\to\infty} d_H(G^n_{z_1,\lambda}(z_0), G^n_{z_2,\lambda}(z_0)) \leqslant d_H(z_1, z_2),$$

co pokazuje, że R_λ jest nieoddalająca i kończy dowód. ∎

W dalszej części tego rozdziału będziemy również potrzebować identyczności rezolwenty. Podążając za Stwierdzeniem 4.2.6 z [8] udowodnimy tę własność.

Stwierdzenie 5.28 (por. [8])
Załóżmy, że $F : D \to D$ jest odwzorowaniem nieoddalającym. Wtedy jego rezolwenta R_λ spełnia warunek

$$R_\lambda(x) = R_\mu\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda}R_\lambda(x) + \frac{\mu}{\lambda}x\right), \qquad x \in D,$$

dla dowolnych $\lambda > \mu > 0$.

Dowód. Ustalmy $x \in D$ i $\lambda, \mu > 0$, takie że $\lambda > \mu$. Zdefiniujmy

$$y := \frac{\lambda - \mu}{\lambda} R_\lambda(x) + \frac{\mu}{\lambda} x. \tag{5.13}$$

Z (5.11) wynika, że istnieje jednoznaczny punkt stały

$$z := R_\mu(y) = \frac{1}{1+\mu} y + \frac{\mu}{1+\mu} F(R_\mu(y)). \tag{5.14}$$

Z drugiej strony mamy

$$\tilde{z} := R_\lambda(x) = \frac{1}{1+\lambda} x + \frac{\lambda}{1+\lambda} F(R_\lambda(x)). \tag{5.15}$$

Zatem z (5.13) oraz z (5.15) otrzymujemy

$$\lambda y - \mu \tilde{z}(1+\lambda) = (\lambda - \mu)\tilde{z} - \lambda \mu F(\tilde{z}),$$

co implikuje

$$\tilde{z} = \frac{1}{1+\mu} y + \frac{\mu}{1+\mu} F(\tilde{z}).$$

Zatem z jednoznaczności konstrukcji punktu stałego z oraz z (5.14) i (5.15), ostatecznie dostajemy

$$R_\mu(y) = z = \tilde{z} = R_\lambda(x),$$

co kończy dowód. ■

Definicja 5.29
Przypominamy, że dla dowolnego $x \in D$ i $F : D \to D$, zbiór punktów skupienia (w topologii normy) ciągu iteracji $\{F^n(x)\}$ odwzorowania F w punkcie x oznaczamy jako $\omega_F(x)$. Teraz w podobny sposób, jeżeli $R_\lambda : D \to D, \lambda > 0$, jest rodziną rezolwent odwzorowania F, definiujemy

$$\omega_{\{R_\lambda\}_{\lambda>0}}(x) = \{y \in \overline{D} : \|R_{\lambda_n}(x) - y\| \to 0 \quad \text{dla pewngo rosnącego ciągu } \{\lambda_n\}, \lambda_n \to \infty\}.$$

Co więcej, *atraktorem* rodziny $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$ nazywamy zbiór $\Omega_{\{R_\lambda\}_{\lambda>0}}$ określony jako

$$\Omega_{\{R_\lambda\}_{\lambda>0}} = \bigcup_{x\in D} \omega_{\{R_\lambda\}_{\lambda>0}}(x).$$

Na koniec tej części udowodnimy, że atraktor rodziny rezolwent odwzorowania nieoddalającego nie mającego punktów stałych leży na brzegu przestrzeni.

Lemat 5.30 ([51])
Załóżmy, że $F : D \to D$ jest odwzorowaniem nieoddalającym bez punktów stałych oraz $R_\lambda : D \to D$, $\lambda > 0$ jest rodziną rezolwent odwzorowania F, wtedy

$$\Omega_{\{R_\lambda\}_{\lambda>0}} \subset \partial D.$$

Dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieje taki $y \in D$, że $\|R_{\lambda_n}(x) - y\| \to 0$ dla pewnych $x \in D$ i rosnącego ciągu $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \to \infty$. Wtedy

$$||R_{\lambda_n}(x) - F(R_{\lambda_n}(x))|| = \frac{1}{1+\lambda_n}||x - F(R_{\lambda_n}(x))|| \to 0, \tag{5.16}$$

gdy $n \to \infty$. Ponieważ topologia przestrzeni (D, d) pokrywa się z topologią normy zauważmy, że przekształcenie $F : D \to D$ jest ciągłe względem normy. Stąd, z nierówności trójkąta oraz z faktu, że odwzorowanie F jest nieoddalające otrzymujemy

$$||F(y) - y|| \leqslant ||F(y) - F(R_{\lambda_n}(x))|| + ||F(R_{\lambda_n}(x)) - R_{\lambda_n}(x)|| + ||R_{\lambda_n}(x) - y|| \to 0,$$

gdy $n \to \infty$. Zatem $F(y) = y$, co stanowi sprzeczność i kończy dowód. ■

5.5 Hipoteza Karlssona-Nussbauma

W tej części udowodnimy nasz główny wynik dotyczący hipotezy Karlssona-Nussbauma. Sformułujemy, wraz z dowodem, odpowiednik tej hipotezy dla rodziny rezolwent odwzorowania nieoddalającego w przestrzeni metrycznej Hilberta. Rozpoczniemy od przypomnienia jednej z fundamentalnych własności przestrzeni metrycznej Hilberta, która pozwala Karlssonowi i Noskovowi uogólnić twierdzenie Wolffa-Denjoya przedstawione przez Beardona w przypadku ograniczonych i ściśle wypukłych obszarów (zob. Twierdzenie 5.5 [58] oraz Stwierdzenie 8.3.3 [69]).

Lemat 5.31 ([69])
Niech $D \subseteq V$ będzie otwartym, ograniczonym, wypukłym zbiorem oraz niech d będzie metryką Hilberta określoną na D. Jeżeli $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ są zbieżnymi ciągami w D, których granicami są odpowiednio x oraz y należące do ∂D oraz odcinek $[x, y] \nsubseteq \partial D$, wtedy dla dowolnego $z \in D$ mamy

$$\lim_{n\to\infty}[d(x_n, y_n) - \max\{d(x_n, z), d(y_n, z)\}] = \infty.$$

Dodatkowo potrzebujemy poniższego lematu, będącego standardowym argumentem, który można znaleźć przykładowo w [23] jako Lemat 5.4.

Lemat 5.32 ([23])
Niech (D, d) będzie ośrodkową przestrzenią metryczną i niech $a_n : D \to \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem nieoddalającym dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli dla każdego $x \in D$ ciąg $\{a_n(x)\}$ jest ograniczony, to istnieje podciąg $\{a_{n_j}\}$ ciągu $\{a_n\}$, taki że granica $\lim_{j\to\infty} a_{n_j}(x)$ istnieje dla dowolnego $x \in D$.

Ustalmy $x_0 \in D$ i rozważmy ciąg $\{x_n \in D : n \in \mathbb{N}\}$ zawarty w zbiorze D. Zdefiniujmy

$$a_n(x) := d(x, x_n) - d(x_n, x_0)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że

$$|a_n(y) - a_n(x)| = |d(y, x_n) - d(x_n, x_0) - d(x, x_n) + d(x_n, x_0)| \leqslant d(x, y), \quad x, y \in D.$$

Co oznacza, że odwzorowanie a_n jest nieoddalające i ciąg $\{a_n(y)\}$ jest ograniczony (przez $d(y, x_0)$) dla każdego $y \in D$. Z Lematu 5.32 wnioskujemy, że istnieje podciąg $\{x_{n_j}\}$ ciągu $\{x_n\}$, taki że granica $\lim_{j\to\infty} a_{n_j}(x)$ istnieje dla każdego $x \in D$, tzn.

$$\lim_{j\to\infty} d(x, x_{n_j}) - d(x_{n_j}, x_0) \tag{5.17}$$

istnieje dla dowolnego $x \in D$.

Mamy już wszystko, aby udowodnić nasz odpowiednik hipotezy Karlssona-Nussbauma.

Twierdzenie 5.33 ([51])
Niech $D \subset V$ będzie ograniczonym, wypukłym obszarem. Załóżmy, że (D, d) jest przestrzenią metryczną Hilberta spełniającą warunek (D) oraz, że $R_\lambda : D \to D, \lambda > 0$, jest rodziną rezolwent odwzorowania nieoddalającego $F : D \to D$, które nie ma punktów stałych. Wtedy

$$\mathrm{co}\Omega_{\{R_\lambda\}_{\lambda>0}} \subseteq \partial D.$$

Dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieją $z_1, \ldots, z_m \in D$, $\zeta^1 \in \omega_{\{R_\lambda\}_{\lambda>0}}(z_1), \ldots, \zeta^m \in \omega_{\{R_\lambda\}_{\lambda>0}}(z_m)$ i $0 < \alpha_1, \ldots, \alpha_m < 1$, takie że $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ oraz $\sum_{i=1}^m \alpha_i \zeta^i \in D$. Ponieważ odwzorowanie F nie ma punktów stałych, z Lematu 5.30 wnioskujemy, że zbiór punktów skupienia rodziny rezolwent $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$ zawiera się w brzegu, tzn.

$$\omega_{\{R_\lambda\}_{\lambda>0}}(z_i) \subseteq \partial D, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Postępując jak w Twierdzeniu 8.3.11 [69] załóżmy, że $m \geqslant 2$ jest najmniejszą liczbą o takiej własności, że

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \zeta^i \in D.$$

Stąd wnioskujemy, że $R_{\lambda^i_j}(z_i) \to \zeta^i \in \partial D$ dla pewnego rosnącego ciągu $\{\lambda^i_j\}_j, \lambda^i_j \to \infty$, gdy $j \to \infty, i = 1, \ldots, m$. Wprowadźmy teraz $\zeta = \zeta^1$ i $\eta = \sum_{i=2}^m \mu_i \zeta^i$, gdzie $\mu_i = \frac{\alpha_i}{1-\alpha_1}$ dla $i \in [2, m]$. Niech $\eta^j = \sum_{i=2}^m \mu_i R_{\lambda^i_j}(z_i)$ dla dowolnego $j \geqslant 1$. Ponieważ m jest minimalne otrzymujemy, że $\zeta, \eta \in \partial D$ oraz $\alpha_1\zeta + (1-\alpha_1)\eta \in D$. Co więcej, wiemy, że zbiór D jest wypukły, stąd mamy $\alpha\zeta + (1-\alpha)\eta \in D$ dla dowolnej $\alpha \in (0, 1)$. Przechodząc do podciągu, z (5.17) możemy założyć, że dla każdego $x \in D$ istnieje granica

$$g(x) = \lim_{j\to\infty} d(x, R_{\lambda^1_j}(z_1)) - d(R_{\lambda^1_j}(z_1), z_1). \tag{5.18}$$

Ponieważ

$$\left\| y - \frac{\lambda^1_j - \mu}{\lambda^1_j} y - \frac{\mu}{\lambda^1_j} z_1 \right\| = \frac{\mu}{\lambda^1_j} ||y - z_1|| \to 0, \quad \text{gdy } \lambda^1_j \to \infty$$

oraz topologie przestrzeni (D, d) i $(\overline{D}, ||\cdot||)$ pokrywają się na D, otrzymujemy

$$d\left(y, \frac{\lambda^1_j - \mu}{\lambda^1_j} y + \frac{\mu}{\lambda^1_j} z_1\right) \to 0, \tag{5.19}$$

gdy $\lambda_j^1 \to \infty$. Korzystając z Lematu 5.27, Stwierdzenia 5.28, (5.19) i warunku (D) mamy

$$\begin{aligned}
g(R_\mu(y)) &= \lim_{j\to\infty} d(R_\mu(y), R_{\lambda_j^1}(z_1)) - d(R_{\lambda_j^1}(z_1), z_1) \\
&= \lim_{j\to\infty} d\left(R_\mu(y), R_\mu\left(\frac{\lambda_j^1-\mu}{\lambda_j^1} R_{\lambda_j^1}(z_1) + \frac{\mu}{\lambda_j^1} z_1\right)\right) - d(R_{\lambda_j^1}(z_1), z_1) \\
&\leqslant \limsup_{j\to\infty} d\left(y, \frac{\lambda_j^1-\mu}{\lambda_j^1} R_{\lambda_j^1}(z_1) + \frac{\mu}{\lambda_j^1} z_1\right) - d(R_{\lambda_j^1}(z_1), z_1) \\
&= \lim_{j\to\infty} d\left(\frac{\lambda_j^1-\mu}{\lambda_j^1} y + \frac{\mu}{\lambda_j^1} z_1, \frac{\lambda_j^1-\mu}{\lambda_j^1} R_{\lambda_j^1}(z_1) + \frac{\mu}{\lambda_j^1} z_1\right) - d(R_{\lambda_j^1}(z_1), z_1) \\
&\leqslant \lim_{j\to\infty} d(y, R_{\lambda_j^1}(z_1)) - d(R_{\lambda_j^1}(z_1), z_1) \\
&= g(y).
\end{aligned}$$

Stąd dla dowolnych $y \in D$ oraz $\mu > 0$,

$$g(R_\mu(y)) \leqslant g(y) \leqslant d(y, z_1).$$

Dalej zauważmy, że z warunku (C) wynika, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$

$$g(\eta^k) = g\left(\sum_{i=2}^m \mu_i R_{\lambda_k^i}(z_i)\right) \leqslant \max_{i=2,\dots,m} g(z_i) \leqslant \max_{i=2,\dots,m} d(z_i, z_1) = M.$$

Stąd, korzystając z metody przekątniowej, istnieje podciąg $\lambda_{j_1}^1 \leqslant \lambda_{j_2}^1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{j_k}^1 \leqslant \ldots$ ciągu $\{\lambda_j^1\}$, taki że

$$\limsup_{k\to\infty} d(\eta^k, R_{\lambda_{j_k}^1}(z_1)) - d(R_{\lambda_{j_k}^1}(z_1), z_1) \leqslant M + 1. \tag{5.20}$$

Ponieważ $R_{\lambda_j^i}(z_i) \to \zeta^i$, gdy $j \to \infty$, dla każdego $i = 1, \dots, m$, otrzymujemy

$$||\eta^j - \eta|| = \left\|\sum_{i=2}^m \mu_i R_{\lambda_j^i}(z_i) - \sum_{i=2}^m \mu_i \zeta^i\right\| \leqslant \sum_{i=2}^m \mu_i ||R_{\lambda_j^i}(z_i) - \zeta^i|| \to 0, \quad j \to \infty.$$

Co implikuje, że $||\eta^j - \eta|| \to 0$, $j \to \infty$. Co więcej, ponieważ $[\zeta, \eta] \nsubseteq \partial D$, z Lematu 5.31 wnioskujemy, że

$$\liminf_{k\to\infty} d(\eta^k, R_{\lambda_{j_k}^1}(z_1)) - d(R_{\lambda_{j_k}^1}(z_1), z_1) = \infty.$$

Jednakże jest to sprzeczne z (5.20), co kończy dowód. ■

Wykorzystamy teraz Twierdzenie 5.33, aby przedstawić twierdzenie typu Wolffa-Denjoya dla rezolwent odwzorowań nieoddalających. W tym celu najpierw wprowadzimy pewną klasę przestrzeni jednoznacznie geodezyjnych, tzw. przestrzeni Busemanna.

Niech (D, d) będzie jednoznacznie geodezyjną przestrzenią metryczną. Rozważmy w D dwa dowolne odcinki geodezyjne $[x, y], [x', y']$. Dla dowolnej $\alpha \in [0, 1]$ wybierzmy punkt $z = \alpha x \oplus (1-\alpha) y$ na odcinku $[x, y]$, taki że

$$d(\alpha x \oplus (1-\alpha)y, y) = \alpha d(x, y)$$

oraz w taki sam sposób wybierzmy punkt $z' = \alpha x' \oplus (1-\alpha)y'$ na odcinku $[x', y']$, taki że

$$d(\alpha x' \oplus +(1-\alpha)y', y') = \alpha d(x', y').$$

Definicja 5.34 ([78], [81])
Mówimy, że przestrzeń geodezyjna (D, d) jest *wypukła w sensie Busemanna* lub jest *przestrzenią Busemanna*, jeżeli

$$d(z, z') \leqslant (1-\alpha)d(x, x') + \alpha d(y, y')$$

dla dowolnych $x, y, x', y' \in D$ oraz $\alpha \in [0, 1]$.

Przykład 5.35
Najprostszymi przykładami przestrzeni Busemanna są n wymiarowa przestrzeń euklidesowa $\mathbb{E}^n$ oraz dla $n \geqslant 2$ przestrzeń hiperboliczna $\mathbb{H}^n$.

Więcej przykładów oraz własności przestrzeni Busemanna można znaleźć przykładowo w Rozdziale 8 w pracy [78].

Jeszcze jednym, ważnym dla nas przykładem przestrzeni Busemanna są niektóre przestrzenie metryczne Hilberta. Łącząc Wniosek 3.3 i Stwierdzenie 3.4 z pracy [5], otrzymujemy następujące stwierdzenie (zob. również [60], [78, s. 191]).

Stwierdzenie 5.36
Niech $D \subset V$ będzie ograniczonym, wypukłym obszarem. Przestrzeń metryczna Hilberta (D, d) jest wypukła w sensie Busamanna wtedy i tylko wtedy, gdy D jest elipsoidą.

Ponieważ w przestrzeniach metrycznych Hilberta każdy odcinek liniowy (w sensie geometrii euklidesowej) jest odcinkiem geodezyjnym, ze Stwierdzenia 5.36 wynika, że przestrzeń (D, d) spełnia warunek (D), zawsze gdy D jest elipsoidą. To prowadzi do sformułowania twierdzenia typu Wolffa-Denjoya dla rezolwent odwzorowań nieoddalających.

Wniosek 5.37 ([51])
Załóżmy, że $D \subset V$ jest elipsoidą oraz $R_\lambda : D \to D, \lambda > 0,$ jest rezolwentą odwzorowania nieoddalającego $F : D \to D$ (w odniesieniu do metryki Hilberta), które nie ma punktów stałych. Wtedy istnieje takie $\xi \in \partial D$, że rodzina rezolwent $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$ zbiega jednostajnie na ograniczonych podzbiorach D do ξ.

Dowód. Na mocy Twierdzenia 5.33 mamy $\mathrm{co}\Omega_{\{R_\lambda\}_{\lambda>0}} \subseteq \partial D$. Ponieważ D, jako elipsoida, jest zbiorem ściśle wypukłym, atraktor jest zbiorem jednoelementowym, tzn.

$$\Omega_{\{R_\lambda\}_{\lambda>0}} = \{\xi\}$$

oraz $\xi \in \partial D$. W dowodzie zbieżności na ograniczonych podzbiorach postępujemy podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 3.3. Załóżmy nie wprost, że istnieje otwarte otoczenie $U \subset \overline{D}$ punktu ξ, ograniczony zbiór $K \subset D$ oraz ciąg $\{y_{\lambda_n}\} \subset K$ $(\lambda_n \to \infty)$, taki że $R_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}) \notin U$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy, korzystając z nieoddalania rezolwenty, otrzymujemy

$$d(R_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}), R_{\lambda_n}(y)) \leqslant d(y_{\lambda_n}, y) \leqslant \mathrm{diam} K$$

dla każdego $y \in K$. Ponieważ $R_{\lambda_n}(y) \to \xi$, z Lematu 5.31 wnioskujemy, że

$$R_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}) \to \xi \in \overline{D} \setminus U,$$

co stanowi sprzeczność i kończy dowód. ■

Rozdział 6

Własność punktu stałego w przestrzeniach o ujemnej krzywiźnie

W ostatnim rozdziale niniejszej rozprawy omówimy pewną charakteryzację ograniczoności przestrzeni geodezyjnych o ujemnej krzywiźnie. Zastosujemy twierdzenie typu Wolffa-Denjoya dla przestrzeni hiperbolicznych w sensie Gromova, autorstwa A. Karlssona, aby przedstawić bardziej bezpośredni dowód ciekawego rezultatu w tym obszarze [79].

6.1 Przestrzenie hiperboliczne w sensie Gromova

Rozpoczniemy od wyjaśnienia co oznacza, że przestrzeń ma własność punktu stałego. Pojęcie to było rozważane w wielu kontekstach (zob. np. [34], [40], [41], [79]). Jednym z najbardziej znanych wyników jest rezultat Browdera głoszący, że każdy ograniczony, domknięty i wypukły podzbiór przestrzeni Hilberta spełnia własność punktu stałego. My skupimy się na definicji, która będzie nam potrzebna w kontekście dalszych rozważań.

Definicja 6.1 ([61], [79])
Niech Y będzie przestrzenią topologiczną. Mówimy, że Y ma *własność punktu stałego*, jeśli każde odwzorowanie nieoddalające $f : Y \to Y$ ma co najwyżej jeden punkt stały, tzn. taki punkt $y \in Y$, że

$$f(y) = y.$$

W [43] M. Gromov przedstawił teorię przestrzeni δ-hiperbolicznych. Ignorując lokalną strukturę przestrzeni, wprowadził warunek, który obejmuje wiele globalnych cech geometrii zupełnej jednospójnej rozmaitości o ujemnej krzywiźnie. Pokazał również, że przestrzenie geodezyjne spełniające warunek δ-hiperboliczności mają wiele eleganckich, globalnych własności, są one np. niezmiennicze względem quasi izometrii (wprowadzonych we wcześniejszym rozdziale). Tematyka ta jest szerzej omówiona przykładowo w [17]. Intuicyjnie warunek δ-hiperboliczności w przestrzeni geodezyjnej oznacza, że dla pewnej stałej $\delta > 0$ trójkąty geodezyjne są "δ-wąskie", tzn. każdy z ich boków znajduje się w δ-otoczeniu dwóch pozostałych boków.

Niech (Y, d) będzie przestrzenią metryczną oraz niech $w \in Y$.

Definicja 6.2 ([17], [79])
Produkt Gromova punktów $x, y \in Y$ w punkcie w definiujemy jako

$$(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)).$$

Niech $\delta \geqslant 0$. Przestrzeń metryczną Y nazywamy *δ-hiperboliczną*, jeśli

$$(x, y)_w \geqslant \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta$$

dla dowolnych $x, y, z, w \in Y$. Jeżeli Y jest δ-hiperboliczną dla pewnej $\delta \geqslant 0$, to przestrzeń Y nazywamy *hiperboliczną w sensie Gromova.*

Przykład 6.3
Niech $\mathcal{B}$ będzie otwartą kulą jednostkową w zespolonej przestrzeni Hilberta oraz weźmy odległość określoną wzorem [41]

$$d(x, y) = \operatorname{arctgh}(1 - \sigma(x, y))^{\frac{1}{2}},$$

gdzie

$$\sigma(x, y) = \frac{(1 - ||x||^2)(1 - ||y||^2)}{|1 - (x, y)|^2}.$$

Przestrzeń $(\mathcal{B}, d)$ jest nazywana *zespoloną kulą Hilberta z metryką hiperboliczną* i jest przykładem przestrzeni w sensie Gromova. Dodatkowo drzewa metryczne również są przestrzeniami hiperbolicznymi w sensie Gromova.

Produkt Gromova jest używany do definiowania abstrakcyjnego pojęcia brzegu $Y(\infty)$, nazywanego jako *brzeg w sensie Gromova.* Mówimy, że ciąg $\{x_n\}$ jest rozbieżny do nieskończoności, jeśli

$$\lim_{n,m\to\infty}(x_n, x_m)_w = \infty$$

dla pewnego (i stąd dla każdego) $w \in Y$. Zdefiniujmy $Y(\infty)$ jako zbiór klas równoważności ciągów rozbieżnych do nieskończoności, gdzie dwa ciągi $\{x_n\}$ oraz $\{y_n\}$ są równoważne, gdy

$$\lim_{n,m\to\infty}(x_n, y_m)_w = \infty.$$

Jeżeli Y jest właściwą przestrzenią geodezyjną i hiperboliczną w sensie Gromova, to istnieje naturalnie metryzowalna topologia na $\overline{Y} = Y \cup Y(\infty)$, co czyni ją uzwarceniem przestrzeni Y oraz Y jest otwarta w $\overline{Y}$ (zob. przykładowo Stwierdzenie III.3.7 w [17]).

Następny lemat pokazuje związek pomiędzy przestrzenią hiperboliczną w sensie Gromova, a używanymi przez nas Aksjomatami.

Lemat 6.4
Jeżeli Y jest przestrzenią hiperboliczną w sensie Gromova, wtedy spełnia Aksjomat 3 *w odniesieniu do brzegu w sensie Gromova.*

Dowód. Załóżmy, że $\{x_n\}$ oraz $\{y_n\}$ są ciągami w Y, $x_n \to \xi \in Y(\infty)$ oraz

$$d(x_n, y_n) - d(y_n, w) \to -\infty \tag{6.1}$$

dla pewnego $w \in Y$. Stąd $(x_n, x_m)_w \to \infty$. Z (6.1) mamy

$$(x_m, y_m)_w = \frac{1}{2}(d(x_m, w) + d(y_m, w) - d(x_m, y_m)) \to \infty.$$

Zatem

$$(x_n, y_m)_w \geqslant \min\{(x_n, x_m)_w, (y_m, x_m)_w\} - \delta \to \infty,$$

co oznacza, że $y_n \to \xi$ i kończy dowód. ■

Jeśli przypomnimy sobie Twierdzenie 3.5, od razu zobaczymy, że twierdzenie typu Wolffa-Denjoya jest prawdziwe w zupełnych, lokalnie zwartych przestrzeniach geodezyjnych Y, które są hiperboliczne w sensie Gromova. Karlsson zaobserwował, że właściwość przestrzeni Y nie jest konieczna (zob. Stwierdzenie 5.1 w [55]).

Twierdzenie 6.5
Niech Y będzie przestrzenią hiperboliczną w sensie Gromova. Załóżmy, że $f : Y \to Y$ jest odwzorowaniem nieoddalającym takim, że

$$d(y, f^n(y)) \to \infty$$

dla pewnego $y \in Y$. Wtedy dla każdego $x \in Y$ orbita $\{f^n(x)\}$ zbiega do punktu ξ na brzegu w sensie Gromova $Y(\infty)$.

Dowód. Niech $\{f^{\varphi(i)}(y)\}$ będzie podciągiem ciągu $\{f^n(y)\}$, takim że

$$d(y, f^k(y)) \leqslant d(y, f^{\varphi(i)}(y)) \tag{6.2}$$

dla $k \leqslant \varphi(i)$, $i = 1, 2, \ldots$. Wtedy, korzystając z nieoddalania przekształcenia f oraz z (6.2), otrzymujemy

$$\begin{aligned}(f^k(y), f^{\varphi(i)}(y))_y &= \frac{1}{2}(d(f^k(y), y) + d(f^{\varphi(i)}(y), y) - d(f^k(y), f^{\varphi(i)}(y))) \\ &\geqslant \frac{1}{2}(d(f^k(y), y) + d(f^{\varphi(i)}(y), y) - d(y, f^{\varphi(i)-k}(y))) \\ &\geqslant \frac{1}{2}d(f^k(y), y)\end{aligned} \tag{6.3}$$

dla każdego $k \leqslant \varphi(i)$. W szczególności

$$(f^{\varphi(i)}(y), f^{\varphi(j)}(y))_y \geqslant \frac{1}{2}\min\{d(f^{\varphi(i)}(y), y), d(f^{\varphi(j)}(y), y)\} \to \infty,$$

gdy $i, j \to \infty$ i stąd istnieje takie $\xi \in Y(\infty)$, że $f^{\varphi(i)}(y) \to \xi$. Co w połączeniu z (6.3) implikuje, że

$$\begin{aligned}(f^i(x), f^{\varphi(i)}(y))_y &\geqslant (f^i(y), f^{\varphi(i)}(y))_y - 2d(x, y) \\ &\geqslant \frac{1}{2}d(f^i(y), y) - 2d(x, y) \to \infty,\end{aligned}$$

gdy $i \to \infty$ dla dowolnego $x \in Y$. Zatem $f^n(x) \to \xi \in Y(\infty)$, co kończy dowód. ■

Definicja 6.6 ([81])
Niech Y będzie przestrzenią geodezyjną. Podzbiór $K \subset Y$ nazywamy *geodezyjnie ograniczonym*, jeżeli nie zawiera żadnego promienia geodezyjnego. Innymi słowy, nie istnieje takie odwzorowanie $\sigma : [0, \infty) \to K$, że

$$d(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) = |t_1 - t_2|$$

dla dowolnych $t_1, t_2 \in [0, \infty)$.

Dodatkowo podzbiór $K \subset Y$ nazywamy *geodezyjnie wypukłym*, jeżeli dla dowolnych $x, y \in K$, geodezyjna je łącząca ma wartości w zbiorze K, tzn. odcinek geodezyjny $[x, y] \subset K$.

Poniższą uwagę, którą możemy znaleźć w [24], wykorzystamy w dowodzie kolejnego lematu.

Uwaga 6.7 (zob. Stwierdzenie 2.1.3 [24])
Niech Y będzie przestrzenią geodezyjną i δ-hiperboliczną oraz rozważmy punkty $x, y, z \in Y$ i $y' \in [x, y]$, $z' \in [x, z]$, takie że

$$d(x, y') = d(x, z') \leqslant (y, z)_x.$$

Wtedy $d(y', z') \leqslant 4\delta$.

Podamy teraz pojęcie przestrzeni CAT(κ), które zostało wprowadzone w latach osiemdziesiątych, a terminologia "CAT(κ)" została zapoczątkowana w 1987 roku przez M. Gromova.

Definicja 6.8 ([17])
Niech (Y, d) będzie przestrzenią geodezyjną i niech M_κ^2 będzie spójną, zupełną, dwuwymiarową rozmaitością Riemanna o krzywiźnie $\kappa \in \mathbb{R}$. Oznaczmy jako D_κ średnicę M_κ^2, wtedy

$$D_\kappa = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} & \text{dla} \quad \kappa > 0, \\ \infty & \text{dla} \quad \kappa \leqslant 0. \end{cases}$$

Trójkątem geodezyjnym nazywamy zbiór trzech punktów $p, q, r \in Y$ oraz trzech odcinków geodezyjnych łączących te punkty $[p, q], [q, r], [r, p]$ i oznaczamy go $\Delta(p, q, r)$. Trójkąt $\overline{\Delta}(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r})$ nazywamy *trójkątem porównawczym dla trójkąta* Δ, jeśli $d(\overline{p}, \overline{q}) = d(p, q)$, $d(\overline{q}, \overline{r}) = d(q, r)$ oraz $d(\overline{p}, \overline{r}) = d(p, r)$. Taki trójkąt $\overline{\Delta} \subseteq M_\kappa^2$ zawsze istnieje, jeżeli

$$d(p, q) + d(q, r) + d(r, p) < 2D_\kappa$$

i jest on jedyny z dokładnością do izomorfizmu. Mówimy, że trójkąt geodezyjny Δ spełnia *nierówność CAT(κ)*, jeśli dla dowolnych $x, y \in \Delta$ i odpowiadających im punktów $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{\Delta}$ z trójkąta porównawczego zachodzi

$$d(x, y) \leqslant d(\overline{x}, \overline{y}).$$

Dodatkowo mówimy, że przestrzeń jest *CAT(κ)*, jeżeli dowolną parę punktów $x, y \in Y$ taką, że $d(x, y) \leqslant D_\kappa$, możemy połączyć geodezyjną oraz każdy trójkąt geodezyjny, którego obwód jest mniejszy niż $2D_\kappa$ spełnia nierówność CAT(κ).

Wiele własności tych przestrzeni można znaleźć w Rozdziale II [17].

Przykład 6.9

- n wymiarowa przestrzeń euklidesowa $\mathbb{E}^n$ jest przykładem przestrzeni CAT(0);
- n wymiarowa przestrzeń hiperboliczna $\mathbb{H}^n$ jest przykładem przestrzeni CAT(−1) (a stąd również CAT(0));
- n wymiarowa sfera jednostkowa jest przykładem przestrzeni CAT(1);
- przestrzenie Hadamarda są zupełnymi przestrzeniami CAT(0);
- kula Hilberta przedstawiona w przykładzie 6.3 jest przestrzenią CAT(−1);
- drzewa metryczne są przykładami przestrzeni CAT(κ) dla dowolnej $\kappa \in \mathbb{R}$.

Następny lemat został udowodniony w [80].

Lemat 6.10 (por. Lemat 2.3 [80])
Niech Y będzie zupełną, wypukłą w sensie Busemanna i δ-hiperboliczną dla pewnej $\delta \geqslant 0$ przestrzenią metryczną. Wtedy dla każdego $w \in Y$ i ciągu $\{x_n\}$ z Y, takiego że

$$(x_n, x_m)_w \to \infty,$$

gdy $n, m \to \infty$, geodezyjne $\sigma_n : [0, d(w, x_n)] \to Y$ łączące punkty w oraz x_n zbiegają do pewnego promienia geodezyjnego $\sigma : [0, \infty) \to Y$.

Dowód. Ustalmy $r > 0$ i wybierzmy na każdym odcinku geodezyjnym $[w, x_n]$ takim, że $d(w, x_n) > r$, punkt u_n spełniający warunek $d(w, u_n) = r$. Udowodnimy, że ciąg $\{u_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Jeżeli $\delta = 0$, to z 0-hiperboliczności ciąg $\{u_n\}$ jest stały. Zatem załóżmy, że $\delta > 0$. Niech $\varepsilon > 0$. Wtedy

$$(x_n, x_m)_w > \frac{4\delta r}{\varepsilon}$$

dla odpowiednio dużych $n, m \geqslant n_0$ i ponieważ

$$(x_n, x_m)_w \leqslant \max\{d(x_n, w), d(x_m, w)\},$$

to istnieją punkty $z_n \in [w, x_n]$, $z_m \in [w, x_m]$, takie że

$$d(z_n, w) = d(z_m, w) = (x_n, x_m)_w.$$

Z Uwagi 6.7 wynika, że $d(z_n, z_m) \leqslant 4\delta$. Ponieważ Y jest wypukła w sensie Busemanna, otrzymujemy

$$d(u_n, u_m) \leqslant \frac{d(w, u_n)}{d(w, z_n)} d(z_n, z_m) \leqslant \frac{r}{(x_n, x_m)_w} 4\delta < \varepsilon$$

dla $n, m \geqslant n_0$. Stąd wynika, że ciąg $\{u_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego i dlatego dla każdego $r > 0$ istnieje granica $\sigma(r) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(r)$ oraz

$$d(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) = \lim_{n\to\infty} d(\sigma_n(t_1), \sigma_n(t_2)) = |t_1 - t_2|$$

dla $t_1, t_2 \in [0, \infty)$. Zatem σ jest promieniem geodezyjnym, co należało udowodnić. ■

6.2 Własność punktu stałego a geodezyjna ograniczoność

W 2015 roku B. Piątek [79] otrzymała interesującą charakteryzację geodezyjnej ograniczoności w przestrzeniach o ujemnej krzywiźnie CAT(κ). Pokażemy jak zastosować twierdzenie typu Wolffa-Denjoya, autorstwa A. Karlssona (tzn. Twierdzenie 6.5), aby nieco uprościć argumenty używane w dowodzie.

Łącząc Twierdzenie 6.5 oraz Lemat 6.10 otrzymujemy następujący dowód Twierdzenia 4.1 z pracy [79] (zob. również ogólniejsze wyniki [80], [81]).

Twierdzenie 6.11 ([49])
Załóżmy, że K jest niepustym, domkniętym i geodezyjnie wypukłym podzbiorem zupełnej przestrzeni CAT(κ), gdzie $\kappa < 0$. Wtedy K ma własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających wtedy i tylko wtedy, gdy K jest geodezyjnie ograniczony.

Dowód. Jeżeli K nie jest geodezyjnie ograniczony, wtedy istnieje promień geodezyjny $\sigma : [0, \infty) \to K$ i złożenie metrycznej projekcji π z K na $\sigma([0, \infty))$ z operatorem przesunięcia jest odwzorowaniem nieoddalającym, nie mającym punktów stałych (zob. np. Stwierdzenie II.2.4 [17]).

W celu udowodnienia przeciwnej implikacji, załóżmy nie wprost, że istnieje odwzorowanie nieoddalające $f : K \to K$ bez punktu stałego. Ustalmy $y \in K$ i zauważmy, że odległość $d(f^n(y), y)$ jest nieograniczona, ponieważ w przeciwnym przypadku asymptotyczne centrum

$$A = \{x \in K : \limsup_{n\to\infty} d(x, f^n(y)) = \inf_{z\in K} \limsup_{n\to\infty} d(z, f^n(y))\}$$

ciągu $\{f^n(y)\}$ jest zbiorem jednopunktowym i jest to punkt stały przekształcenia f (zob. np. Stwierdzenie 7 [32]). Zatem istnieje podciąg $\{f^{n_i}(y)\}$ ciągu $\{f^n(y)\}$, taki że

$$d(f^{n_i}(y), y) \to \infty,$$

gdy $i \to \infty$. Argumentując jak w dowodzie Twierdzenia 6.5 (rozważając f^{n_i} zamiast f^n) otrzymujemy, że

$$(f^{n_i}(y), f^{n_j}(y))_y \to \infty,$$

gdy $i, j \to \infty$. Ponieważ dla dowolnej $\kappa < 0$ przestrzeń CAT(κ) jest wypukła w sensie Busemanna i hiperboliczna w sensie Gromova (zob. np. Stwierdzenie III.1.2 [17]), na mocy Lematu 6.10 istnieje promień geodezyjny $\sigma : [0, \infty) \to K$, co stanowi sprzeczność i kończy dowód. ■

Literatura

[1] M. Abate, Horospheres and iterates of holomorphic maps, *Math. Z.* 198 (1988), 225-238.

[2] M. Abate, Invariant distances, *Metrical and Dynamical Aspects in Complex Analysis*, L. Blanc-Centi (ed.), Springer, (2017), 1-24.

[3] M. Abate, Converging semigroups of holomorphic maps, *Rend. Acc. Naz. Lincei* 82 (1988), 223–227.

[4] M. Abate, J. Raissy, Wolff-Denjoy theorems in nonsmooth convex domains, *Ann. Mat. Pura Appl.* 193 (2014), 1503-1518.

[5] L. M. Alabdulsada, L. Kozma, On Non-positive Curvature Properties of the Hilbert Metric, *J. Geom. Anal.* 29 (2019), 569-576.

[6] F. G. Avkhadiev, K. J. Wirths, *Schwarz-Pick Type Inequalities*, Birkhäuser Verlag, Berlin, 2009.

[7] J. M. Ayerbe Toledano, T. Dominguez Benavides, G. López Acedo, *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory*, Springer Basel AG, 1997.

[8] M. Bačák, *Convex Analysis and Optimization in Hadamand Spaces*, De Gruyter, Berlin, 2014.

[9] W. Ballmann, *Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature* (DMV-Seminar, Bd. 25. Basel, Boston), Birkhäuser, Berlin, 1995.

[10] H. Bauschke, P. Combettes, *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*, Springer, New York, 2011.

[11] A.F. Beardon, Iteration of contractions and analytic maps, *J. London Math. Soc.* 41 (1990), 141-150.

[12] A. F. Beardon, The dynamics of contractions, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 17 (1997), 1257-1266.

[13] Y. Benoist, Convexes hyperboliques et fonctions quasisymétriques, *Publ. Math. IHES* 97 (2003), 181-237.

[14] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis Vol. 1*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[15] F. Bracci, Fixed points of commuting holomorphic mappings other than the Wolff point, *Trans. Amer. Math. Soc.* 355 (2003), 2569–2584.

[16] F. Bracci et al., Asymptotic behavior of orbits of holomorphic semigroups, *J. Math. Pures Appl.* 133 (2020), 263-286.

[17] M. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[18] F. E. Browder, Nonexpansive nonlinear operators in Banach spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A.* 54 (1966), 1041–1044.

[19] M. Budzyńska, A Denjoy-Wolff theorem in $\mathbb{C}^n$, *Nonlinear Anal.* 75 (2012), 22-29.

[20] M. Budzyńska, The Denjoy-Wolff theorem for condensing mappings in a bounded and strictly convex domain in a complex Banach space, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 39 (2015), 919-940.

[21] M. Budzyńska, T. Kuczumow, S. Reich, The Denjoy-Wolff theorem for compact holomorphic mappings in reflexive Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 396 (2012), 504-512.

[22] M. Budzyńska, T. Kuczumow, S. Reich, The Denjoy-Wolff theorem for compact holomorphic mappings in complex Banach spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 38 (2013), 747-756.

[23] M. Budzyńska, T. Kuczumow, S. Reich, Theorems of Denjoy-Wolff type, *Ann. Mat. Pura Appl.* 192 (2013), 621-648.

[24] S. Buyalo, V. Schroeder, *Elements of Asymptotic Geometry*, Europ. Math. Soc., 2007.

[25] A. Całka, On conditions under which isometries have bounded orbits, *Colloq. Math.* 48(2) (1984), 219-227.

[26] C. Carathéodory, Über das Schwarzsche Lemma bei analytischen Funktionen von zwei komplex Veränderlichen, *Math. Ann.* 97 (1926), 76-98.

[27] T. Casavecchia, S. Díaz-Madrigal, A non-autonomous version of the Denjoy-Wolff theorem, *Complex Anal. Oper. Theory* 75 (2013), 1457–1479.

[28] Ch. Chidume, *Geometric properties of Banach spaces and nonlinear iterations*, Springer, London, 2009.

[29] C. H. Chu, P. Mellon, Iteration of compact holomorphic maps on a Hilbert ball, *Proc. Amer. Math. Soc.* 125 (1997), 1771-1777.

[30] S. Cobzas, M. D. Rus, Normal cones and Thompson metric, *Topics in Mathematical Analysis and Applications*, T. M. Rassias, L. Tóth (eds.), Springer International Publishing, Switzerland, (2014), 209-258.

[31] A. Denjoy, Sur l'itération des fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris* 182 (1926), 255-257.

[32] S. Dhompongsa, W. A. Kirk, B. Sims, Fixed points of uniformly lipschitzian mappings, *Nonlinear Anal.* 65 (2006), 762-772.

[33] S. Dineen, *The Schwarz lemma*, Oxford Science Publications The Clarendon Press, Oxford University Press, 1989.

[34] T. Dominguez Benavides, The failure of the fixed point property for unbounded sets in c_0, *Proc. Amer. Math. Soc.* 140 (2012), 645-650.

[35] P. Eberlein, B. O'Neill, Visibility manifolds, *Pac. J. Math.* 46 (1973), 45-109.

[36] M. Edelstein, The construction of an asymptotic center with a fixed-point property, *Bull. Amer. Math. Soc.* 78 (1972), 206-208.

[37] R. Espinola, Ó. Madiedo, A. Nicolae, Borsuk-Dugundji type extension theorems with Busemann convex target spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 43 (2018), 225–238.

[38] M. Furi, A. Vignoli, A fixed point theorem in complete metric spaces, *Boll. Un. Mat. Ital.* Serie IV (1969), 505–509.

[39] S. Gaubert, G. Vigeral, A maximin characterisation of the escape rate of non-expansive mappings in metrically convex spaces, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 152 (2012), 341-363.

[40] K. Goebel, W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[41] K. Goebel, S. Reich, *Hyperbolic Uniform convexity, hyperbolic geometry and nonexpansive mappings*, Pure Appl. Math., Marcel Dekker, Inc., New York–Basel, 1984.

[42] S. Gouëzel, *Subadditive cocycles and horofunctions*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians-Rio de Janeiro 2018. Vol. III. Invited lectures, B. Sirakov, P.N. de Souza and M. Viana, World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2018), 1933-1947.

[43] M. Gromov, Hyperbolic groups, Essays in group theory, *Springer Verlag, MSRI Publ.* 8 (1987), 75-263.

[44] L. A. Harris, Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces, *Advances in holomorphy*, J. A. Barroso (ed.), North Holland (1979), 345-406.

[45] M. H. Heins, On the iteration of functions which are analytic and single-valued in a given multiply-connected region, *Am. J. Math* 63 (1941), 461-480.

[46] M. Hervé, Quelques propriétés des applications analytiques d'une boule à m dimensions dans elle-même, *J. Math. Pures Appl.* 42 (1963), 117-147.

[47] D. Hilbert, Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier, *Punkte. Math. Ann.* 46 (1895), 91-96.

[48] H. Hopf, W. Rinow, Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche, *Comment. Math. Helv.* 3 (1931), 209-225.

[49] A. Huczek, A. Wiśnicki, Wolff–Denjoy theorems in geodesic spaces, *Bull. Lond. Math. Soc.* 53 (2021), 1139-1158.

[50] A. Huczek, A. Wiśnicki, Theorems of Wolff–Denjoy type for semigroups of nonexpansive mappings in geodesic spaces, *Math. Nachr.* (2023).

[51] A. Huczek, A. Wiśnicki, On the Karlsson–Nussbaum conjecture for resolvents of nonexpansive mappings, *Ann. Fenn. Math*, 48 (2023), 153–161.

[52] A. Huczek, On some results related to the Karlsson-Nussbaum conjecture in geodesic spaces, (wysłana do czasopisma).

[53] J. Kapeluszny, T. Kuczumow, S. Reich, The Denjoy-Wolff theorem for condensing holomorphic mappings, *J. Funct. Anal.* 167 (1999), 79-93.

[54] J. Kapeluszny, T. Kuczumow, S. Reich, The Denjoy-Wolff theorem in the open unit ball of a strictly convex Banach space, *Adv. Math.* 143 (1999), 111-123.

[55] A. Karlsson, Nonexpanding maps and Busemann functions, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 21 (2001), 1447-1457.

[56] A. Karlsson, On the dynamics of isometries, *Geom. Topol.* 9 (2005), 2359-2394.

[57] A. Karlsson, Dynamics of Hilbert nonexpansive maps, in Handbook of Hilbert geometry, A. Papadopoulos and M. Troyanov (eds.), *European Mathematical Society*, Zürich, (2014), 263-273.

[58] A. Karlsson, G. A. Noskov, The Hilbert metric and Gromov hyperbolicity, *Enseign. Math.* 2(48) (2002), 73–89.

[59] G. Kelgiannis, Trajectories of semigroups of holomorphic functions and harmonic measure, *J. Math. Anal. Appl.* 474 2 (2019), 1364-1374.

[60] P. Kelly, E. Straus, Curvature in Hilbert geometries, *Pac. J. Math.* 8 (1958), 119-125.

[61] W. Kirk, N. Shahzad, *Fixed Point Theory in Distance Spaces*, Springer, 2000.

[62] S. Kobayashi, Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings, *J. Math. Soc. Japan* 19 (1967), 460-480.

[63] S. Kobayashi, Distance, holomorphic mappings and the Schwarz lemma, *J. Math. Soc. Japan* 19 (1967), 481-485.

[64] S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[65] T. Kuczumow, S. Reich, D. Shoikhet, Fixed points of holomorphic mappings: a metric approach, in Handbook of Metric Fixed Point Theory, W. A. Kirk and B. Sims (eds.), *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, (2001), 437-515.

[66] T. Kuczumow, A. Stachura, Iterates of holomorphic and k_D-nonexpansive mappings in convex domains in $\mathbb{C}^n$, *Adv. Math.* 81 (1990), 90-98.

[67] K. Kunugui, Applications des espaces á une infinité de dimensions á la théorie des ensembles, *French Proc. Imp. Acad.* 11 (1935), 351–353.

[68] K. Kuratowski, *Topologie I.* Monografie Matematyczne, vol. 20., Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa-Wrocław, 1948.

[69] M. Lemmens, R. Nussbaum, *Nonlinear Perron-Frobenius theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[70] B. Lemmens, R. D. Nussbaum, Birkhoff's version of Hilbert's metric and its applications in analysis, in Handbook of Hilbert Geometry, A. Papadopoulos, M. Troyanov (eds.), *European Mathematical Society*, Zürich, (2014), 275-306.

[71] B. Lemmens et al., Denjoy-Wolff theorems for Hilbert's and Thompson's metric spaces, *J. Anal. Math.* 134 (2018), 671-718.

[72] B. Lemmens, M. Roelands, Unique geodesics for Thompson's metric, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 65 (2015), 315-348.

[73] L. Lempert, La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule, *Bull. Soc. Math. France* 109 (1981), 427-474.

[74] B. D. MacCluer, Iterates of holomorphic self-maps of the unit ball in $\mathbb{C}^N$, *Mich. Math. J.* 30 (1983), 97-106.

[75] R. D. Nussbaum, Hilbert's projective metric and iterated nonlinear maps, *Mem. Amer. Math. Soc.* 391 (1988), 1-137.

[76] R. D. Nussbaum, Fixed point theorems and Denjoy–Wolff theorems for Hilbert's projective metric in infinite dimensions, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 29 (2007), 199–250.

[77] H. Pajot, Gromov Hyperbolic Spaces and Applications to Complex Analysis, *Metrical and Dynamical Aspects in Complex Analysis*, L. Blanc-Centi (ed.), Springer, (2017), 55-66.

[78] A. Papadopoulos, *Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature*, Europ. Math. Soc., 2005.

[79] B. Piątek, The fixed point property and unbounded sets in spaces of negative curvature, *Israel J. Math.* 209 (2015), 323-334.

[80] B. Piątek, The behavior of fixed point free nonexpansive mappings in geodesic spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 445 (2017), 1071-1083.

[81] B. Piątek, On the fixed point property for nonexpansive mappings in hyperbolic geodesic spaces, *J. Nonlinear Convex Anal.* 19 (2018), 571-582.

[82] S. Reich, D. Shoikhet, *Nonlinear semigroups, fixed points and geometry of domains in Banach spaces*, Imperial College Press, London, 2005.

[83] A. Seo, A Kobayashi pseudo-distance for holomorphic bracket generating distributions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 371 (2019), 5023-5038.

[84] T. Suzuki, Common fixed points of one-parameter nonexpansive semigroups, *Bull. London Math. Soc.* 38 (2006), 1009-1018.

[85] A. C. Thompson, On certain contraction mappings in a partially ordered vector space, *Proc. Amer. Math. Soc.* 14 (1963), 438–443.

[86] K. Tomoyasu, Proper metic spaces and Higson compactifications of product spaces, *Glas. Mat.* 34(54) (1999), 65-72.

[87] E. Vesentini, Complex geodesics and holomorphic mappings, *Sympos. Math.* 26 (1982), 211-239.

[88] E. Vesentini, Complex geodesics, *Composito Math.* 44 (1981), 375-394.

[89] J. Wolff, Sur l'itération des fonctions holomorphes dans une région, et dont les valeurs appartiennent á cette région, *C. R. Acad. Sci. Paris* 182 (1926), 42-43.

[90] J. Wolff, Sur l'itération des fonctions bornées, *C. R. Acad. Sci. Paris* 182 (1926), 200-201.

[91] J. Wolff, Sur une généralisation dun theéoréme de Schwarz, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 182 (1926), 918-920.

[92] L. Xu, H. Yang, On the generalizations of Denjoy-Wolff theorem, *Acta Math. Sci. Ser.* 32 (2012), 1333-1337.

[93] A. Zimmer, Gromov Hyperbolicity of Bounded Convex Domains, *Metrical and Dynamical Aspects in Complex Analysis*, L. Blanc-Centi (ed.), Springer, (2017), 67-114.