dr hab. inż. Bożena Piątek, prof. Pol. Śl.
Katedra Matematyki
Wydział Matematyki Stosowanej
Politechnika Śląska w Gliwicach
ul, Kaszubska 23
44-100 Gliwice

Gliwice, 15.07.2023

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Aleksandry Huczek

Pani magister Aleksandra Huczek przedstawiła rozprawę doktorską pod tytułem

Dynamika odwzorowań nieoddalających w przestrzeniach geodezyjnych

Pani magister Aleksandra Huczek jest współautorką pięciu prac:

1. A. Huczek, A. Wiśnicki, Wolff-Denjoy theorem in geodesic spaces, Bulletin of the London Mathematical Society 53 (2021), 1139-1158.
2. A. Huczek, A. Wiśnicki, Theorems of Wolff-Denjoy type for semigroups of nonexpansive mappings in geodesic spaces, Mathematische Nachrichten (2023), https://doi.org/10.1002/mana.202100404
3. A. Huczek, A. Wiśnicki, On the Karlsson-Nussbaum conjecture for resolvents of nonexpansive mappings, Annales Fennici Mathematici 48 (2023), 153-161.
4. A. Huczek, On some results related to the Karlsson-Nussbaum conjecture in geodesic spaces, (w recenzji).
5. R. Espinola, A. Huczek, On convergence of infinite products of convex combinations of mappings in CAT(0) spaces, Arabian Journal of Mathematics 12 (2023), 353-361.

Recenzowana praca oparta jest w dużej mierze o wyniki z czterech z tych artykułów (poza ostatnim). Duża liczba prac napisanych wspólnie z promotorem nie pomaga w ustaleniu stopnia samodzielności badań prowadzonych przez doktorantkę. Sama praca doktorska składa się z sześciu rozdziałów, przy czym rozdziały pierwszy i drugi mają charakter wstępny i nie zawierają wyników autorstwa pani magister Huczek. Tematami przewodnimi pracy są twierdzenie Wolffa-Denjoya – temu tematowi poświęcono trzeci i czwarty rozdział pracy doktorskiej – oraz hipoteza Karlssona-Nussbauma, będąca uogólnieniem wspomnianego twierdzenia i opisana w rozdziale piątym. Króciutki rozdział szósty zawiera alternatywny dowód twierdzenia autora niniejszej recenzji o charakterystyce zbiorów domkniętych i wypukłych w przestrzeniach CAT(κ), gdzie κ jest liczbą rzeczywistą ujemną.

Oryginalne twierdzenie Denjoya-Wolffa mówi, że jeśli f jest funkcją holomorficzną na otwartym kole jednostkowym D w C bez punktów stałych, to ciąg orbit f^n jest zbieżny jednostajnie na zwartych podzbiorach D do pewnego punktu na brzegu D. Z racji, że każda funkcja holomorficzna jest odwzorowaniem nieoddalającym względem metryki Kobayashiego, wspomniane twierdzenia można uogólniać na wypukłe (ściśle wypukłe) podzbiory (skończenie wymiarowych) przestrzeni Banacha z metryką Hilberta, Thomsona i Poincare oraz pseudometryki Kobayashiego. Wyniki w tym kierunku otrzymali m.in. C. H. Chu i P. Mellon oraz grupa lubelskich matematyków skupiona wokół T. Kuczumowa i S. Reicha. A. Karlsson w swoich badaniach odszedł od wspomnianych metryk na podzbiorach przestrzeni Banacha i założył, że dziedzina odwzorowania jest podzbiorem przestrzeni geodezyjnej (bądź quasi-geodezyjnej) spełniającej pewne dodatkowe założenia jak np. lokalną zwartość. W pracy doktorskiej pani Huczek założenia te oznaczono jako aksjomaty 1 – 4 oraz warunek C (będący uogólnieniem wypukłości przestrzeni w sensie Busemanna) i właśnie te przestrzenie spełniające pewne z tych założeń stanowią centrum zainteresowań Doktorantki.

W dalszej części przejdę do omówienia kolejnych rozdziałów pracy poza tymi, które mają charakter wyłącznie wprowadzający, jak zostało to już wyszczególnione wcześniej.

W rozdziale trzecim mgr Huczek przedstawiła wyniki dotyczące zbieżności w nieskończoności dla odwzorowań nieoddalających w przestrzeniach skończenie wymiarowych odpowiednio właściwych bądź ściśle wypukłych. Autorka rozważała zarówno przypadek dyskretny (czyli zachowanie ciągu Picarda) jak i przypadek ciągły, czyli jednoparametrową ciągłą półgrupę odwzorowań. Głównym narzędziem stosowanym w rozwiązaniach są małe i duże horokule. Narzędzie to z powodzeniem było stosowane już wcześniej m.in. w pracach: A. Karlssona, M. Budzyńskiej, T. Kuczumowa i innych. Przypadek ciągły wymagał tutaj zastosowania odpowiednika twierdzenia Całki (o ograniczoności orbity) dla półgrup ciągłych (patrz Twierdzenie 3.24). Do najistotniejszych wyników tego rozdziału należałoby zaliczyć Twierdzenia 3.15, 3.25 oraz 3.29. W pierwszym z nich autorka pokazała zbieżność w topologii zwarto-otwartej ciągu Picarda dla odwzorowania nieoddalającego bez punktów stałych do punktu w nieskończoności. W kolejnych dwóch rozważała przypadek półgrupy ciągłej.

W kolejnym czwartym rozdziale Autorka rozpatrywała przypadek przestrzeni nieskończenie wymiarowych modyfikując nieco aksjomaty (Aksjomaty 1'-4') oraz założenia o odwzorowaniach, które są nieoddalające i zwarte. Także w tym rozdziale osobno rozważana jest zbieżność w nieskończoności orbity odwzorowania oraz półgrupy ciągłej. Do najistotniejszych wyników należy tu zaliczyć Twierdzenia 4.12 w przypadku orbity jednego odwzorowania oraz 4.19 dla ciągłych półgrup odwzorowań. Warto zauważyć, że w przypadku jednoparametrycznej półgrupy ciągłej wystarczy założyć, że jedna z funkcji f_t jest zwarta.

W omówionych powyżej rozdziałach magister Huczek zakładała, że podzbiór przestrzeni jest ściśle wypukły. Kolejny, piąty rozdział został poświęcony osłabionemu przypadkowi, gdy podzbiór jest tylko wypukły. Motywacją do badań przedstawionych w tym rozdziale była hipoteza Karlssona-Nussbauma, w której rozważany jest właśnie taki podzbiór. Wówczas zgodnie z hipotezą istnieje wypukły podzbiór brzegu zbioru zawierający atraktor (w sensie silnej topologii), czyli zbiór zawierający punkty skupienia orbit dla wszystkich argumentów. Idea atraktora stanowi istotne narzędzie w teorii punktów stałych – porównaj chociażby wyniki W. A. Kirka i K. Goebla (atraktor w sensie silnej topologii) czy też T. H. Kim, T. C. Lim i H. K. Xu, którzy rozważali odpowiednik atraktora w słabej topologii. Autorce omawianej dysertacji udało się pokazać, że atraktor odwzorowania nieoddalajacego bez punktów stałych zawiera się w gwiaździstym podzbiorze brzegu – porównaj Twierdzenia 5.17 i 5.18. Analogiczną własność dla przypadku jednoparametrycznej półgrupy ciągłej wykazano odpowiednio w Twierdzeniach 5.24 oraz 5.25. Kolejny podrozdział poświęcono analogicznym wynikom uzyskanym dla rezolwenty odwzorowania nieoddalającego – porównaj Twierdzenie 5.33. Zauważmy w tym miejscu, że wyniki z tego rozdziału oparto na artykułach, których jedyną autorką jest pani Huczek, zatem recenzent niniejszej dysertacji nie ma w tym momencie wątpliwości, co do ich autorstwa.

Główny wynik krótkiego rozdziału szóstego, czyli Twierdzenie 6.11, został już omówiony we wstępie.

Mimo dużej staranności przedstawionej dysertacji doktorskiej, wkradła się do niej drobna usterka.

Strona 59 linijka 2: istnieje podciąg taki, że d(z_{n_k},y) < ½. Powinno być d(z_{n_k},z) < ½ tak samo jak w analogicznym dowodzie lematu 3.2.

Konkluzja

Przedstawioną mi pracę oceniam wysoko. Autorka zajmuje się niebanalnymi problemami i otrzymała bardzo dużą liczbę interesujących wyników. Stąd też **wnoszę o dopuszczenie mgr Aleksandry Huczek do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**