Dr hab. Adam Lecko, prof. UWM
Katedra Analizy Zespolonej
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
ul. Słoneczna 54, 10-710 Olsztyn

Olsztyn, 14.06.2023 r.

Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej

Recenzja rozprawy doktorskiej

mgr Aleksandry Huczek

zatytułowanej

Dynamika odwzorowań nieoddalających w przestrzeniach geodezyjnych

Przedmiot badań

A. Recenzowana praca poświęcona jest badaniom dynamiki odwzorowań nieoddalających, co prowadzi autorkę do znalezienia uogólnień twierdzenia Wolffa-Denjoya. Przy czym rozważany jest przez nią zarówno przypadek dyskretny, jak również przypadek ciągły dotyczący jednoparametrowych półgrup ciągłych. Pierwsze z tych uogólnień przedstawione zostały w rozdziale trzecim jako Twierdzenie 3.3 dla przypadku dyskretnego i Twierdzenie 3.25 dla przypadku ciągłego. W obu twierdzeniach rozważania autorki dotyczą przestrzeni geodezyjnych właściwych, a więc przestrzeni geodezyjnych zupełnych lokalnie zwartych. W Twierdzeniu 3.3 autorka dowodzi, że jeśli (Y, d) jest przestrzenią geodezyjną właściwą, spełniającą Aksjomat 4 oraz dla każdego punktu brzegowego ζ zbioru Y i każdego punktu z_0 ze zbioru Y iloczyn domknięć dużych horokul o środku w punkcie ζ i biegunie w punkcie z_0 jest zbiorem jednopunktowym, to dla dowolnego odwzorowania nieoddalającego f zbioru Y w siebie, przy założeniu, że f nie ma ograniczonych orbit, istnieje punkt brzegowy ξ zbioru Y taki, że ciąg iteracji $\mathbb{N} \ni n \mapsto f^n$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorach ograniczonych w Y do punktu ξ. Aksjomaty 1-4, dotyczące przestrzeni metrycznych, których używa autorka, sformułowane zostały przez Karlssona. Z kolei w Twierdzeniu 3.4, (które powinno być nazwane Wnioskiem 3.4 z uwagi na ostatni wers na stronie 41), autorka dowodzi, że jeśli f jest kontrakcją przestrzeni Y, to przy pozostałych założeniach takich jak w Twierdzeniu 3.3, istnieje punkt ξ należący do domknięcia przestrzeni Y taki, że ciąg iteracji $\mathbb{N} \ni n \mapsto f^n$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorach ograniczonych w Y do punktu ξ. Zastępujac Aksjomat 4 Aksjomatem 3 można usunąć założenie o iloczynie domknięć dużych horokul i przeformułować odpowiednio Twierdzenie 3.3 i Wniosek 3.4 do Twierdzenia 3.5 i Wniosku 3.6. W kolejnym podrozdziale numerowanym 3.1.2 autorka wykorzystuje Twierdzenie 3.5 i Wniosek 3.6 do uzyskania wyników w przestrzeni wektorowej unormowanej skończenie wymiarowej V. Głównym rezultatem jest Twierdzenie 3.15 dla odwzorowań nieoddalających i Twierdzenie 3.16 dla kontrakcji. W pierwszym z nich autorka dowodzi, że jeśli (D, d) jest przetrzenią geodezyjną zupełną spełniającą warunek (C), której topologia pokrywa się z topologią normy, gdzie D jest obszarem ograniczonym ściśle wypukłym w przestrzeni wektorowej skończenie wymiarowej z normą, to dla dowolnego odwzorowania nieoddalającego f na D bez punktów stałych istnieje punkt ξ na brzegu obszaru D, taki, że ciąg iteracji $\mathbb{N} \ni n \mapsto f^n$ jest zbieżny jednostajnie na ograniczonych podzbiorach w D do punktu ξ. Analogicznie jest w Twierdzeniu 3.16, przy czym tutaj autorka zakłada, że f jest kontrakcją zaś punkt ξ należy do $\overline{D}$. Warunek (C) oznacza, że każda kula w obszarze D jest wypukła. Z Twierdzenia 3.15 wynikają interesujące wyniki dla przestrzeni z metryką Hilberta, Thompsona i Kobayashiego, sformułowanie odpowiednio jako Wnioski 3.17-3-19, z których Wniosek 3.18 jest oryginalnym wynikiem.

W rozdziale 3.2 otrzymane wyniki z rozdziału 3.1 dla przypadku dyskretnego przeniesione zostały na przypadek ciągły. Główny wynik dla odwzorowań nieoddalających zawarty jest w Twierdzeniu 3.25, zaś dla kontrakcji w Twierdzeniu 3.27. I tak w Twierdzeniu 3.25, przy analogicznych założeniach jak w Twierdzeniu 3.3, autorka dowodzi, że dla każdej jednoparametrowej półgrupy ciągłej odwzorowań nieoddalających $S := \{f_t : Y \to Y | t \geqslant 0\}$ bez ograniczonych orbit istnieje punkt brzegowy zbioru Y taki, że półgrupa S jest zbieżna jednostajnie na zbiorach ograniczonych w Y do ξ. Z kolei w Twierdzeniu 3.27 autorka dowodzi, że jeśli istnieje dodatnie t_0 takie, że f_{t_0} z rodziny S jest kontrakcją, to istnieje w domknięciu zbioru Y punkt ξ taki, że półgrupa S jest zbieżna jednostajnie na podzbiorach ograniczonych przestrzeni Y do punktu ξ.

W kolejnym kroku autorka wykorzystuje Twierdzenie 3.25, a właściwie Wniosek 3.26, do uzyskania twierdzenia typu Wolffa-Denjoya w przestrzeniach wektorowych unormowanych skończenie wymiarowych V w przypadku ciągłym. Głównym rezultatem jest Twierdzenie 3.29. Autorka dowodzi, że jeśli (D, d) jest przestrzenią geodezyjną zupełną spełniającą warunek (C), przy czym D jest obszarem ograniczonym ściśle wypukłym w przestrzeni V, to dla każdej jednoparametrowej półgrupy ciągłej odwzorowań nieoddalających $S := \{f_t : Y \to Y | t \geqslant 0\}$ wśród, których dla pewnego t_0 dodatniego odwzorowanie nieoddalające f_{t_0} jest bez punktu stałego, istnieje punkt brzegowy ξ zbioru Y, do którego półgrupa S jest zbieżna jednostajnie na podzbiorach ograniczonych zbioru D. Następnie autorka zaznacza we Wnioskach 3.30 i 3.31, że otrzymany wynik ma zastosowanie w przestrzeniach z metryką Kobayashiego i Hilberta.

B. Dalsze badania autorka przenosi na przestrzenie (λ, κ)-quasi geodezyjne oraz na odwzorowania nieoddalające zwarte tych przestrzeni. Jest to temat rozdziału czwartego. W tym celu autorka modyfikuje Aksjomaty 1-4 Karlssona przyjmując w ich miejsce Aksjomaty 1', 3' i 4' z pominięciem Aksjomatu 2'. W istocie jej badania ograniczają się do przestrzeni $(1, \kappa)$-quasi geodezyjnych. W głównym twierdzeniu dotyczącym tego zagdnienia tj. Twierdzeniu 4.9, autorka dowodzi, że jeśli (Y, d) jest przestrzenią $(1, \kappa)$-geodezyjną spełniającą Aksjomaty 1' i 3' oraz f jest dowolnym odwzorowaniem zwartym nieoddalającym na Y bez ograniczonych orbit, to istnieje punkt brzegowy ξ zbioru Y taki, że ciąg iteracji $\mathbb{N} \ni n \mapsto f^n$ jest zbieżny jednostajnie na podzbiorach ograniczonych w D do punktu ξ. Wykorzystując otrzymany wynik autorka wyprowadza w Twierdzeniu 4.12 analogiczną własność dla dowolnego zbioru ograniczonego ściśle wypukłego w przestrzeniach Banacha. W podrozdziale 4.3 autorka rozważa przypadek ciągły dla przestrzeni $(1, \kappa)$-geodezyjnych. Główny wynik zamieszcza w Twierdzeniu 4.15 dla jednoparametrowych półgrup ciągłych odwzorowań nieoddalających bez ograniczonych orbit wśród których istnieje odwzorowanie nieoddalające zwarte f_{t_0} dla pewnego t_0 dodatniego. Wówczas istnieje punkt ξ na brzegu zbioru Y taki, że półgrupa S jest zbieżna jednostajnie na podzbiorach ograniczonych przestrzeni Y do punktu ξ. Zakładając dodatkowo, że f_{t_0} jest kontrakcją autorka dowodzi Twierdzenie 4.17. Wówczas ξ leży w domknięciu zbioru Y. Korzystając z Twierdzenia 4.15 autorka uzyskuje następnie Twierdzenie 4.19 dla obszarów ograniczonych ściśle wypukłych D w przestrzeniach Banacha. We Wnioskach 4.20 i 4.21 rozważa jak wcześniej obszar D wyposażony odpowiednio w metrykę Hilberta i Kobayashiego.

C. Rozdział piąty w rozprawie poświęcony jest hipotezie Karlssona-Nussbauma. Po przejrzystym wprowadzeniu w tematykę (podrozdział

5.1), autorka przedstawia swoje wyniki kolejno w podrozdziałach 5.2-5.5. Jej oryginalnym rezultatem jest Twierdzenie 5.14 i jego dokładniejsza wersja jakim jest Twierdzenie 5.15. Autorka dowodzi, że jeśli (D, d) jest przestrzenią geodezyjną zupełną spełniającą warunek (C), której topologia pokrywa się z topologią normy, przy czym D jest obszarem ograniczonym wypukłym w przestrzeni skończenie wymiarowej V oraz f jest odwzorowaniem nieoddalającym na D bez skończonych orbit, to istnieje punkt ξ na brzegu obszaru D i punkt z_0 w zbiorze D taki, że atraktor Ω_f odwzorowania f zawiera się w zbiorze $\mathrm{ch}(F)$, gdzie F jest przecięciem po wszystkich promieniach $r \in \mathbb{R}$ dużych horokul domkniętych o środku w punkcie ξ i promieniu r, mających biegun w punkcie z_0 ze zbioru D. Tutaj, $\mathrm{ch}(F)$ jest sumą zbiorów gwiaździstych $\mathrm{ch}(\xi) := \{x \in \partial D : [x, \xi] \subset \partial D\}$ po wszystkich $\xi \in F$. Następnie wykorzystując udowodniony przez siebie Lemat 5.16, w którym dowodzi, że każda duża horokula w przestrzeni geodezyjnej zupełnej (D, d) spełniającej założenia Twierdzenia 5.15 jest zbiorem gwiaździstym, autorka wyprowadza Twierdzenie 5.17, w którym przy tych samych założeniach jak w Twierdzeniu 5.15, dowodzi, że atraktor odwzorowania f zawiera się w zbiorze $\mathrm{ch}(\mathrm{ch}(\xi))$ dla pewnego ξ na brzegu obszaru D. Zastępując warunek (C) Aksjomatem 2* autorka dowodzi w Twierdzeniu 5.18, że przy pozostałych założeniach jak w Twierdzeniu 5.15, atraktor odwzorowania f zawiera się w gwiaździstym podzbiorze brzegu obszaru D generowanym przez pewien element ξ należący do brzegu obszaru D. W kolejnym podrozdziale 5.3 autorka przenosi wyniki rozdziału 5.2 na przypadek ciągły, a więc dla półgrup jednoparametrowych. Odpowiednikiem Twierdzenia 5.15 jest Twierdzenie 5.23, zaś Twierdzenia 5.18 jest Twierdzenie 5.25. W następnym podrozdziale 5.4 autorka podaje konstrukcję rezolwenty odwzorowania nieoddalającego na obszarze ograniczonym wypukłym, na którym określona jest metryka Hilberta. Następnie w najważniejszym wyniku tego rozdziału autorka dowodzi odpowiednik hipotezy Karlssona-Nussbauma, a mianowicie, dla przestrzeni metrycznej Hilberta (D, d) spełniającej warunek (D), gdzie D jest obszarem ograniczonym wypukłym i odzworowania nieoddalającego F na obszarze D, które nie ma punktów stałych, otoczka wypukła atraktora rodziny rezolwent odzwzorowania F leży na brzegu obszaru D.

D. W ostatnim rozdziale pracy autorka podaje alternatywny dowód Twierdzenia 4.1 z pracy [79], a mianowicie, jeśli K jest niepustym podzbiorem domkniętym geodezyjnie wypukłym w przestrzeni zupełnej $CAT(\kappa)$ dla ujemnego κ, to K ma własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających wtedy i tylko wtedy, gdy K jest geodezyjnie ograniczony. W dowodzie autorka oparła sie na udowodnionym przez siebie Twierdzeniu 6.5 i Lemacie 6.10.

Opinia o rozprawie

A. Moja ocena rozprawy jest wysoka. Problemy, które autorka badała są trudne, wymagające dużej wiedzy w zakresie analizy nieliniowej, w szczególności w teorii dynamiki odwzorowań nieoddalających. Wyniki, które autorka uzyskała są ważne zarówno od strony teoretycznej jak i potencjalnych zastosowań. Budzi moje uznanie, że autorka podjęła się badań w dziedzinie, w której pracuje wielu wybitnych matematyków i w swoich badaniach dotknęła zagadnień o wysokim stopniu trudności, m.in. hipotezy Karlssona-Nussbauma. Oryginalnym wkładem autorki w tematykę jest rozważenie przestrzeni geodezyjnych, na które przeniosła badania nad dynamiką odwzorowań nieoddalających. Wyniki, które uzyskała w tym zakresie, i które przedstawiła w rozprawie, są oryginalne, głębokie i w istotny sposób poszerzają wiedzę w badanej tematyce.

Rozprawa licząca 100 strony technicznie napisana jest dobrze. Nie znalazłem błędów merytorycznych. Sposób prowadzenia rozumowań w dowodach jest przejrzysty. Rozprawa zawiera dobrze napisane dwa pierwsze rozdziały, które zawierają niezbędną terminologię oraz gruntowną historię badań. Pomijam wypisywanie drobnych usterek edytorskich, na które można się natknąć w pracy, jak chociażby wspomniane wcześniej odwołanie do Wniosku 3.4 na stronie 41, który w pracy występuje jako Twierdzenie 3.4. Usterki te nie mają bowiem wpływu na merytoryczną wartość recenzowanej pracy.

B. Biorąc wszystkie aspekty pod uwagę moja opinia o rozprawie jest pozytywna. Rozprawa spełnia wymogi stawiane pracy doktorskiej. Wnoszę więc o dopuszczenie Pani mgr Aleksandry Huczek do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Ponadto wnioskuję o wyróżnienie rozprawy.

Z poważaniem,

Adam Lecko