prof. dr hab. Barbara Opozda
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
ul. prof. Stanisława Łojasiewicza 6
30-348 Kraków
e-mail: barbara.opozda@im.uj.edu.pl

Kraków, 27 lipca 2023

Opinia o pracy doktorskiej Pani mgr Aleksandry Huczek

zatytułowanej

Dynamics of nonexpansive mappings in geodesic spaces

Rozprawa doktorska autorstwa Pani mgr Huczek jest, w kategorii prac doktorskich z matematyki teoretycznej, rozprawą obszerną. Ma 100 stron, w tym 36 pierwszych stron zawiera materiał przygotowawczy, tj. preliminaria techniczne i historyczne. Rozdziały 3-6 zawierają wyniki Autorki opublikowane w trzech pracach wspólnych z Promotorem ([49], [50], [51]) w latach 2021 - 2023 oraz te zawarte w jednej samodzielnej pracy ([52]), złożonej do druku.

Rozdział pt. Literatura zawiera listę 93 publikacji, zarówno tych mających dla prezentowanych w rozprawie treści walor czysto historyczny lub informacyjny, jak i tych, z których Autorka czerpała inspiracje i narzędzia badawcze. Literatura cytowana jest poprawnie i adekwatnie do treści pracy.

Motywem przewodnim pracy są twierdzenia typu Wolffa-Denjoya. Wsród wielu twierdzeń tego typu, udowodnionych od czasu publikacji oryginalnego twierdzenia i kilku jego dowodów w roku 1926, Autorka wybrała jako punkt wyjścia do swoich rozważań twierdzenia A.F. Beardona (z lat 90-tych XX w.) i M. Budzyńskiej (z lat 2012-2013).

Oryginalne twierdzenie Wolffa-Denjoya dotyczyło koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej i ciągów iteracji odwzorowań holomorficznych tego koła w siebie. Twierdzenia typu Wolffa-Denjoy prezentowane w omawianej pracy dotyczą, ogólnie rzecz biorąc, przestrzeni metrycznych i iteracji odwzorowań nieoddalających (w tzw. przypadku dyskretnym) lub jednoparametrowych półgrup ciągłych (w tzw. przypadku ciągłym).

W Rozdziale 3. Autorka przedstawia wyniki swoich (wspólnych z A. Wiśnickim) prac [49] i [50]. Wyniki te dotyczą właściwych przestrzeni geodezyjnych i obszarów ograniczonych ściśle wypukłych w skończenie wymiarowych unormowanych przestrzeniach wektorowych. Najważniejsze w tym rozdziale są, moim zdaniem, Twierdzenia 3.3, 3.15, 3,24 (analogiczne do Twierdzenia 1.11), 3.25 i 3,29. Wniosek 3.18 jest ładny.

Rozdział 4. poświęcony jest twierdzeniu Wolffa-Denjoya w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych. W porównaniu z rozdziałem poprzednim, przestrzenie geodezyjne zastąpione są przestrzeniami $(1, \kappa)$-quasi geodezyjnymi a skończenie wymiarowe unormowane przestrzenie wektorowe zastąpione są przestrzeniami Banacha. Przedstawiono i udowodniono kolejne twierdzenia typu Wolffa-Denjoya, odpowiadające nowej sytuacji, tj. Twierdzenia 4.9, 4.10, 4.15, 4.17, 4.19, 4.20, Wniosek 4.18. Tak jak w Rozdziale 3. rozważono przypadki dyskretny i ciągły. Rezultaty Rozdziału 4. zaczerpnięto z prac [49, [52].

Twierdzenie typu Wolffa-Denjoya pojawia się także w Rozdziale 6. W tym przypadku twierdzenie typu Wolffa-Denjoya, tj. Twierdzenie 6.5 z pracy Karlsona [55], dotyczy przestrzeni hiperbolicznych w sensie Gromova. Pani Huczek wykorzystuje to twierdzenie, aby podać nowy dowód twierdzenia autorstwa B. Piątek z [79], charakteryzujące gogeodezyjną ograniczoność w przestrzeniach o ujemnej krzywiźnie.

Dodatkowym tematem (także związanym z twierdzeniami typu Wolffa-Denjoya) rozważanym w omawianej pracy jest hipoteza Karlssona-Nussbauma. Hipoteza ta, sformułowana jako Hipoteza 5.2, dotyczy punktów skupienia iteracji odwzorowań nieoddalających na wypukłych obszarach przestrzeni $\mathbf{R}^n$ wyposażonych w metrykę Hilberta. Wynikiem rozważań Autorki są tutaj Twierdzenia 5.17, 5.18, 5.21, 5.23, 5.24, 5.25 pochodzące z pracy [52] i będące, jak sama Autorka określa, pewnymi wariacjami dotyczącymi hipotezy Karlssona-Nussbauma. Głównym jednak rezultatem odnoszącym się do tej hipotezy jest Twierdzenie 5.33 (z pracy [51]). Ciekawym zastosowaniem Twierdzenia 5.33 jest Wniosek 5.37 o rezolwentach odwzorowań nieoddalających w pewnym szczególnym przypadku takich odwzorowań.

Jak widać z powyższego skrótowego opisu, w omawianej pracy doktorskiej sformułowano i udowodniono ponad 20 zasadniczych twierdzeń dotyczących różnych sytuacji. Do tego dochodzi duża liczba lematów i uwag z dowodami. Praca jest dobrze napisana. Autorka wykazała się bardzo dobrą znajomością tematyki, oczytaniem, zdolnościami i pracowitością.

Mam drobne zastrzeżenia dotyczące redakcji pracy. Podam kilka przykładów.

Rzucily mi się w oczy pewne niezręczne sformułowania. Np. po Definicji 1.23 na str. 20. Autorka pisze: Powyższa definicja jest prawdziwa w ogólniejszym przypadku... . Definicja nie bywa prawdziwa lub nieprawdziwa. Może być np. poprawna. Ale w tym przypadku uwaga Autorki jest na tyle ogólnikowa, że jest dla mnie niezrozumiała. O jaką rozmaitość zespoloną chodzi? Rozmaitość zespolona może nie mieć żadnej kanonicznej struktury metrycznej. Może chodzi o podrozmaitość zespolonej przestrzeni Banacha? W jakim sensie? Teoria rozmaitości nieskończenie wymiarowych jest pełna niejednoznacznych pojęć. Moim zdaniem, lepiej unikać takich uwag.

W Uwadze 1.10 (i jeszcze w innych miejscach) nie podoba mi się zapis $f^{n_k}(x) \to \infty$. Co oznacza taka zbieżność do nieskończoności? Czy nie jest tak, że odwzorowanie ma orbity nieograniczone, jeśli jego orbita w co najmniej jednym punkcie przestrzeni jest zbiorem nieograniczonym?

Wydaje mi się, że geodezyjną nazywano (i ciągle się nazywa) najkrótszą drogę między punktami na powierzchni Ziemi, a nie najkrótszą odległość, jak to napisano na str. 25.

Na str. 26. nie jest prawdą, ze geodezyjnymi na sferze są podzbiory kół wielkich. Nie wszystkie podzbiory. Tylko odcinki kół wielkich są geodezyjnymi.

Na str. 27. w definicji horokuli przydałoby się objaśnienie, czy np. lim sup w trzeciej linijce definicji jest skończone. Przed sformułowaniem Definicji 1.39 Autorka odwołuje się do pracy Abate [1]. Ale w tej pracy Abate używa nazwy horosfera. Jaka jest relacja między tymi pojęciami?

Są pewne kolizje oznaczeń. Np. na stronie 25. wprowadzono oznaczenie $[x, y]$ jako obraz geodezyjnej łączacej punkty x, y (oznaczenie jest, nawiasem mówiąc, niejednoznaczne). Na str. 42. $[x, y]$ oznacza odcinek afiniczny łączący punkty x, y zbioru D – również przestrzeni metrycznej.

Drobne usterki nie wpływają na jakość pracy. Stwierdzam, że przedstawiona rozprawa spełnia wszystkie wymagania stawiane pracom doktorskim i rekomenduje dopuszczenie Pani mgr Aleksandry Huczek do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Pracę uważam za bardzo dobrą, zasługującą na wyróżnienie.