**Słowa kluczowe:** geometria absolutna, geometria euklidesowa, geometria Euklidesa, płaszczyzna kartezjańska nad liczbami hiperrealnymi, płaszczyzna semi-Euklidesowa, aksjomaty geometrii, Euklides, Hilbert, Hartshorne, Borsuk, Szmielew, Tarski, Twierdzenie Talesa, metoda pola, twierdzenie co-side, automatyczne dowodzenie twierdzeń, proporcja, liczby rzeczywiste, *Elementy* Księga VI, podstawa programowa dla szkół, nauczyciele matematyki

**Abstrakt**

Rozprawa jest poświęcona podstawom geometrii syntetycznej na płaszczyźnie i dotyczy przystawania trójkątów, prostych równoległych oraz figur podobnych. Wynika ona z dwóch zasadniczych obserwacji. Po pierwsze, podczas gdy geometria syntetyczna jest istotną częścią programów nauczania w szkołach średnich, akademickie kursy dla nauczycieli przedstawiają jedynie krótką informację o podejściu syntetycznym, wymieniając aksjomaty, zazwyczaj te z systemu Hilberta. Po drugie, podręczniki szkolne przeinaczają podstawy geometrii i rzadko wykorzystują osiągnięcia nowych technologii. Praca przedstawia propozycje zmian programu nauczania w szkołach średnich i zawiera kurs geometrii syntetycznej dla przyszłych nauczycieli matematyki. W związku z teorią figur podobnych praca wykracza poza standardowe podejście aksjomatyczne i wprowadza do kursu automatyczne dowodzenie twierdzeń.

Rozdział pierwszy zawiera kurs geometrii syntetycznej dla przyszłych nauczycieli oparty na aksjomatach Hilberta, unowocześnionych przez Robina Hartshorne’a. Kurs obejmuje twierdzenia o trójkątach przystających, liniach równoległych, przecięciach linii w trójkącie, oraz twierdzenie Talesa w wersji dla odcinków współmiernych. Zawiera ponadto, rozbudowany przegląd Księgi I *Elementów* Euklidesa skoncentrowany na pojęciach pierwotnych, pojęciach i twierdzeniach związanych z aksjomatem Pascha, kryteriach przystawania trójkątów, algebrze odcinków i kątów oraz na Piątym Postulacie. Kurs przedstawia również aksjomaty geometrii euklidesowej Borsuka, Szmielew oraz Tarskiego i porównuje systemy Euklidesa, Hilberta, Borsuka i Szmielew oraz Tarskiego z perspektywy aksjomatycznej. W związku z aksjomatem równoległości, rozprawa przedstawia model płaszczyzny nieeuklidesowej, w którym kąty dowolnego trójkąta sumują się do $π$ ; jest to podprzestrzeń płaszczyzny kartezjańskiej nad niearchimedesowym ciałem liczb hiperrzeczywistych $R^{\*}$. W związku z podobieństwem trójkątów kurs zawiera wprowadzenie do automatycznego dowodzenie twierdzeń. Kwestie te odnoszą się do twierdzenia Talesa i są szczegółowo opisane w rozdziale trzecim i czwartym.

Rekomendacje do programu nauczania w szkole średniej obejmują wykorzystanie aplikacji *euclidea*, zasadę, że kryteria przystawania trójkątów poprzedzają aksjomat równoległości, oraz wykorzystanie diagramów związanych z twierdzeniem Euklidesa VI.1 i twierdzeniem co-side.

Twierdzenie Talesa stanowi cezurę między matematyką grecką i współczesną. Jest ono wzorowym przykładem użycia przez Euklidesa proporcji, współczesna geometria zaś przyjmuje, że teoria to jest niespójna. Dlatego XX-wieczne systemy dowodząc twierdzenia Talesa wykorzystują arytmetykę odcinków lub aksjomat ciągłości. W rozdziale 2 analizujemy te dowody, pokazując, że są one na tyle skomplikowane, że nie sposób wprowadzić je do podręczników szkolnych.

W pracy przedstawiamy alternatywne podejście: stosujemy metodę pola, która pozwala odzyskać Euklidesa metodę proporcji z prostotę jej dowodów, a jednocześnie realizuje najwyższe standardy ścisłości. Odpowiednio, w rozdziale trzecim przedstawiamy aksjomaty metody pola i podajemy dla niej model; a w rozdziale czwartym − automatyczne dowody twierdzeń z Księgi VI wygenerowane za pomocą programu GCLC.

W rozdziale piątym zbieramy wnioski wyprowadzane w poprzednich rozdziałach.